

## MÉTODOS TOPOGRÁFICOS

### 1.- Necesidad del establecimiento metodológico:

#### a) Elementos participantes:

El 90% del trabajo topográfico está constituido por el trabajo de campo, para el cual intervienen los siguientes dos grupos de factores según la variabilidad:

- **Grupo invariable:**
  - *Equipo humano:* Este no varía, cualquier equipo hace el mismo trabajo.
- **Grupo variable** (según la precisión requerida):
  - *Instrumentos topográficos*
  - *Metodología.*

El **objetivo** común de ambos grupos es el de **realizar un trabajo dentro de una tolerancia.**

#### b) Planteamiento general:

**Objetivo:** Hacer un trabajo que entre en tolerancia.

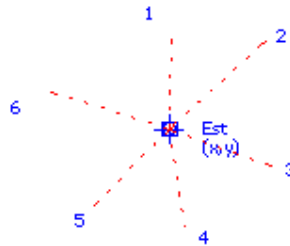
#### **Datos a buscar:**

X , Y -----> Planimetría.

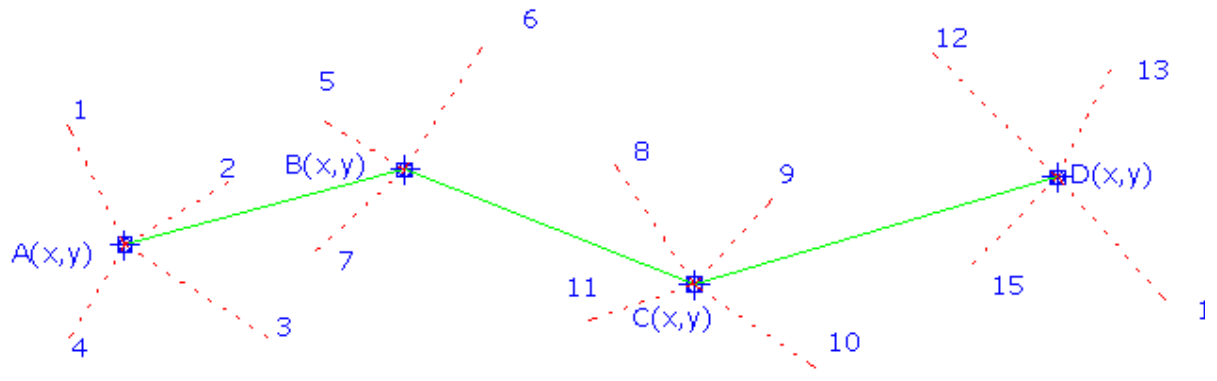
Z-----> Altimetría.

#### **Métodos:**

- **Radiación:** Se estaciona el instrumento y se realiza la observación a todos los puntos posibles desde ella.



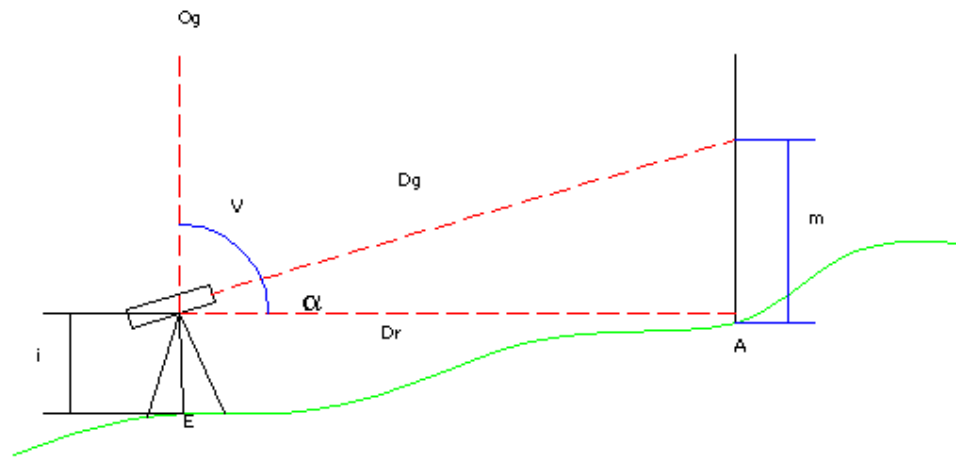
- **Poligonal:** Unión de varias estaciones de un levantamiento, a partir de cuales a su vez, se puede realizar una radiación.



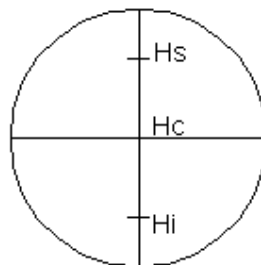
- **Intersección:** Se consiguen muy buenas precisiones ya que solo se miden ángulos. No siempre puede ser aplicado ya que hace falta una geometría adecuada.

**2.- Técnicas elementales de campo:**

V= Ángulo Zenital  
 a=Ángulo de pendiente(Ascendente o descendente)  
 Dg = Distancia geométrica  
 Dr = Distancia reducida  
 i = altura  
 m= Altura desde el elemento a determinar hasta el hilo central.



L inf. = Lectura hilo inferior  
 L cen.= Lectura hilo central  
 L sup.= Lectura hilo superior



**Nº Generador:**

$$g = (L_{\text{inf}} - L_{\text{sup}}) * k$$

$$g = \Delta \frac{fB}{fA} * k$$

**Distancia reducida:**

$$Dr = g * \text{sen}^2 V$$

$$Dr = g * \text{cos}^2 \alpha$$

Nota: En los exámenes hay que tener cuidado con el ángulo que nos dan ya que se suele jugar con ambos ángulos.

En el caso de que el instrumento utilizado sea un **distanciómetro** habrá que tener en cuenta los siguientes factores:

- **Presión y Temperatura:** Se obtienen a partir de unas tablas proporcionadas por el fabricante.
- **Cte. del prisma:** Si el distanciómetro y el prisma son de la misma casa suelen estar ya reglados, no obstante siempre se deberá comprobar.

**Pasos a realizar en un levantamiento:**

1. *Visar siempre a un pto de referencia:*

Como mínimo habrá que conocer el azimut al pto de referencia y como máximo las coordenadas de la estación.

2. *Orientar el instrumento:*

Se fija la lectura deseada en el limbo horizontal y a continuación se visa horizontalmente el pto de referencia. De tal forma que:

$$L_{\text{Est}}^1 = \theta_{\text{Est}}^1$$

$$L_{\text{Est}}^2 = \theta_{\text{Est}}^2$$

...

3. *Instrumento desorientado:*

El instrumento en el punto de referencia tendrá una lectura cualquiera, utilizar este método damos precisión ya que el error que se comete es inferior.

Cálculo de la desorientación (SEst):

Datos:

$$L_{\text{Est}}^{\text{ref}}$$

$$L_{\text{Est}}^1$$

$$L_{\text{Est}}^2$$

Desorientación:

$$\sum Est = \theta_{\text{Est}}^{\text{ref}} - L_{\text{Est}}^{\text{ref}}$$

Corrección:

$$\theta_{Pst}^{\text{cor}} = \sum Est + L_{Pst}^1$$

### 3.- Principales Metodologías Topográficas:

#### Planimetría:

##### 1. Radiación:

Método más sencillo.

*Instrumentos:*

Taquímetro y mira.  
Teodolito y mira.  
Distanciómetro y prisma.

##### 2. Itinerarios o Poligonales:

Sucesión encadenada de radiaciones (varias estaciones)

*Instrumentos:*

Taquímetro y mira.  
Teodolito y distanciómetro.

##### 3. Intersección:

Método más utilizado cuando se pretendía buscar precisión hace unos 5 años.

###### 1. Intersección de ángulos:

- I. Directa: Se estaciona sobre pto de coordenadas conocidas.
- I. Inversa: Solamente se conocen las coordenadas del pto visado, a calcular.
- I. Mixta: Se conocen las coordenadas de la Estación y de los pto a calcular.

*Instrumento:*  
Teodolito

###### 2. Intersección de distancias:

Solo se miden distancias.  
Pto de coordenadas conocidas o estaciones de coordenadas conocidas.

*Instrumento:* Teodolito y  
Distanciómetro.

## Altimetría:

### 1. Nivelación de alta precisión (NAP):

Instrumento: Niveles de alta precisión.  
Precisión: 0.01mm

### 2. Nivelación geométrica:

Instrumento: Niveles.  
Precisión: 1mm

### 3. Nivelación trigonométrica:

Instrumento: Cualquier instrumento que mida ángulos verticales.  
Precisión: 1cm.

### 4. Nivelación Barométrica:

Instrumento: Barómetro.  
Precisión: Varios metros.

## RADIACIÓN

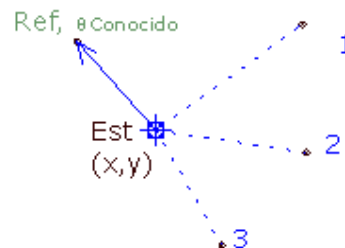
### 1.- Fundamento y Observación:

Método topográfico planimétrico más sencillo de todos los existentes, en el cual se observan ángulos y distancias.

### Método:

1. Estacionar en un punto de coordenadas conocidas.
2. Visar a un punto de referencia.
  - o Para orientar.
  - o Para controlar el posible arrastre del limbo horizontal o error producido durante la medición.
  - o Para poder corregir la desorientación.
3. Toma de ángulos y distancias a todos los puntos a determinar.

### Cálculo de la desorientación (S):



$$\sum_{Est}^{ref} = \theta_{Est}^{ref} - L_{Est}^{ref}$$
$$\theta_{Est}^1 = \sum_{Est}^{ref} + L_{Est}^1$$
$$\theta_{Est}^2 = \sum_{Est}^{ref} + L_{Est}^2$$

### Método de las series o vuelta de horizonte:

Este es uno de los métodos más utilizados, el cual consiste en realizar una serie de observaciones en CD (retrogiro) y al llegar al final de la serie realizar de nuevo las observaciones en CI (destrogiro).

C.D.(Retrogiro)	C.I.(Destrogiro)
$L_{\text{E}}^1$	$L_{\text{E}}^1$
$L_{\text{E}}^2$	$L_{\text{E}}^3$
$L_{\text{E}}^3$	$L_{\text{E}}^2$
$L_{\text{E}}^1$	$L_{\text{E}}^1$

**Uso:**

La radiación siempre va acompañada de otros métodos, los cuales se realizan previamente, como puede ser las poligonal.

La radiación suele usarse por lo general para dar **ptos de apoyo** y en trabajos de **relleno**.

**Instrumentos:**

Semiestación	Teodolito óptico + Distanciómetro	<i>Se adosan</i>
Equipo topográfico	Teodolito Electrónico + Distanciómetro	<i>Equipo único e inseparable que da coordenadas (x,y) automáticamente</i>
Estación total		

**Toma de datos:**

1. **Semi-estación:**
  - LH
  - LV
  - Dg ó Dr si el distanciómetro esta calibrado con el teodolito óptico utilizado.
  - Presión: Barómetro.
  - Temperatura :Termómetro.
  - Cte del Prisma.
2. **Estación Total:**
  - Presión: Barómetro.
  - Temperatura: Termómetro.
  - Cte del Prisma.
3. **Taquímetro + mira:**
  - LH
  - LV
  - Lectura de Hilos.
  - K=100 (por lo general)
4. **Teodolito + cinta métrica**
  - LH
  - Dr (en suelo horizontal)
  - Dg y LV (en suelo con pendiente)

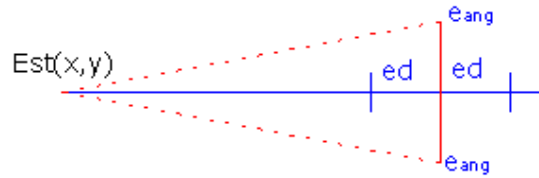
**2.- Tolerancia:**

**Tolerancia (T):** Error máximo permitido.

En cualquier operación de medida si existen varias causas de errores accidentales (angulares y distancias), el error máximo resultante será la componente cuadrática de dichos errores accidentales máximos.

$$e_{\text{max}} = \sqrt{D^2 + ang^2}$$

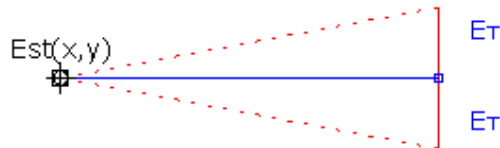
Si conocemos la dirección en la que actúan esos errores, y solamente en el caso, en el que dichos errores accidentales actúen perpendicularmente entre sí, el emax resultante no será la componente cuadrática de los errores accidentales sino que será igual al mayor de los dos.



$$e_{ac} \perp \rightarrow e_{\max} = e_{ac_{\max}}$$

Esto se debe a que la probabilidad de que se den a la vez todos los eac es de la proporción 1/2500.

**a) Error transversal:** Error debido a la medida de los ángulos.



Para una visual:

$$E_T = e_a * D$$

Para 2 visuales ya que un ángulo siempre tiene dos visuales, la referencia y el propio punto:

$$E_T = e_a * D * \sqrt{2}$$

ea= Error angular.

D= Promedio de las distancias de todos los puntos radiados.

**Cálculo del error transversal (ET):**

**Error angular:**

*Planimetría:*

$$e_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

*Altimetría:*

$$e_a = \sqrt{e_v^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

**Desglose de errores:**

**1.- Error de lectura:**

Común a la planimetría y a la altimetría.

a = apreciación

Aparatos ópticos:

$$e_i = \frac{2}{3} \alpha$$

Aparatos electrónicos:

El error de lectura en los distanciómetros viene dado por la norma DIN 18723, siendo la desviación típica para una dirección medida en las dos posiciones del anteojo.

**2.- Error de verticalidad:**

*Planimetría:*

$$e_v = \frac{1}{12} S$$

*Altimetría:*

$$e_v = \frac{1}{3} S$$

**3.- Error de puntería:**

*Planimetría:*

$$e_p = \frac{10''}{A} * \left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$$

*Altimetría:*

Blanco de puntería o punto bien definido:

$$e_p = \frac{20''}{A} * \left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$$

Se hace la observación a una mira o prisma:

$$e_p = \frac{50''}{A} * \left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$$

(10''-->30cc; 20''-->60cc; 50''-->1c54cc)

**4.- Error de dirección:**

Este error únicamente se dará en planimetría.

$$e_d = \frac{e_e + e_s}{D} * r''$$

**ee** = error de estacionamiento. Se suele utilizar el radio de la señal utilizada más el radio del punto donde se coloca el prisma.

**es** = error de señalización.



**\* USO DE BESSEL, Influencia en el ET**

El error de lectura y el de puntería quedarán afectados de la siguiente forma

$$e_l = \frac{2}{3} a \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e_p = \frac{10''}{A} * \left(1 + \frac{4A}{100}\right) * \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si damos dos vueltas de horizonte los errores se reducirán en raíz de 4.

$$e_l = \frac{2}{3} a \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$e_p = \frac{10''}{A} * \left(1 + \frac{4A}{100}\right) * \frac{1}{\sqrt{4}}$$

**Caso especial:**

Al usar una **brújula**, las lecturas se realizarán en 2 posiciones a la vez, CD y CI, por lo que el error de lectura para este caso se reducirá en raíz de dos. De tal modo que si hacemos bessel el error de lectura quedara reducido en raíz de 4.

$$e_l = \frac{2}{3} a \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} a \frac{1}{\sqrt{4}}$$

Ejemplo(1):

¿Cuál será el ep en 2 series con brújula? y el  $\epsilon_{el}$ ?

$$e_p = \frac{10''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$e_l = \frac{2}{3} a \frac{1}{\sqrt{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} a \frac{1}{\sqrt{8}}$$

**b) Error longitudinal:** Error debido a la medida de las distancias.



$$E_L = \text{error}_{\text{absoluto en } D} = er * D$$

**Cálculo del error longitudinal (EI):**

1. Distanciometro:

El fabricante nos dará con el instrumento la precisión longitudinal de la siguiente forma:

$$E_i = 5mm + 5ppm$$

Esto quiere decir que se cometen 5mm fijos más 5mm por cada km.

Ejemplo (1):

D=1km; EI=5mm+5ppm.  
¿Cuál es el error cometido en 1km?

$$E_i = 5mm + 5mm = 10mm$$

$$E_i = 10mm$$

... y para 1'5 km?

$$E_i = 5mm + 7.5mm = 12.5mm$$

$$E_i = 12.5mm$$

## 2. Cinta métrica:

Terreno llano:

$$E_i = 0.00032 * L + 0.0022\sqrt{L}$$

Terreno difícil:

$$E_i = 0.00032 * L + 0.0078\sqrt{L}$$

## 3. Mira:

Los errores vendrán provocadas por dos factores:

1. Error máximo de la distancia.
  - Función de:
    - Porcentaje de error en la distancia.
    - Aumentos anteojo.
2. Error en la distancia por inclinación de la mira
  - Función de:
    - Porcentaje de error en la distancia.
    - Ángulo de pendiente de la visual.

El error de la mira será igual a:

$$E_{mira} = \sqrt{e_{máx\ dist}^2 + e_{incl.mira}^2}$$

Ejemplo (2):

Taquímetro de 26X  
Pendiente del terreno=7g  
Dmáx=185m

e máx en la distancia = 0.27%  
e en la distancia por inclinación de mira= 0.14%

$$E_{m\grave{a}x} = \sqrt{0.27^2\% + 0.14^2\%} = 0.0030\%$$

El error de la mira vendrá dado en er por lo que calcularemos el eabs que es el mismo que el EI.

$$E_I = E_{abs} = e_r * D$$

$$E_I = 0.0030\% * 185m = 0.56m$$

### 3.- Limitaciones del Método de Radiación:

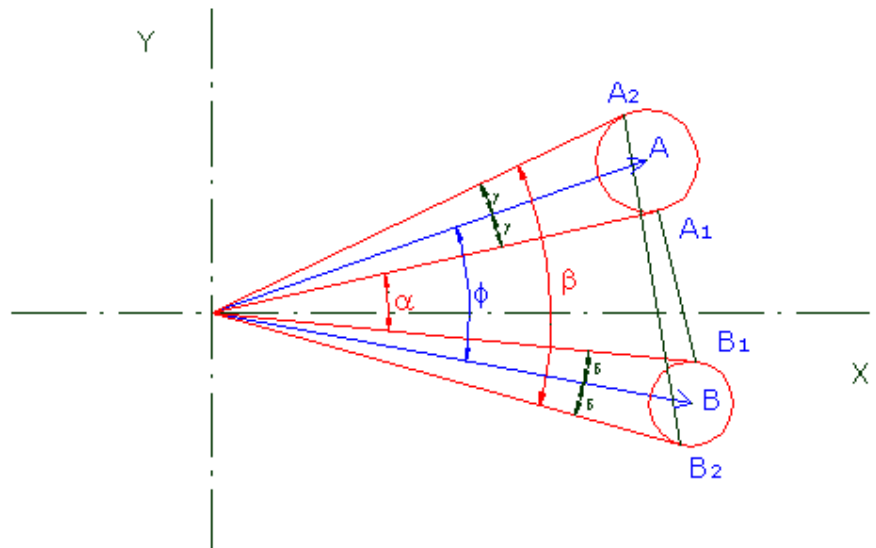
#### Ventajas:

1. Muy rápido de ejecutar.
2. Se puede utilizar en cualquier tipo de terreno.

#### Inconvenientes:

**Falta de homogeneidad en precisión** entre puntos muy próximos entre sí, **en el sentido** periférico o **perimetral**. Lo que hace que por este motivo haya que que limitar las distancias de radiación de modo que los errores no tengan representación gráfica. En el caso de que haya que medir puntos próximos entre sí habrá que hacerlo siempre con comprobación.

Demostración de que la radiación si es homogénea en el sentido radial:



$$\phi - \alpha = \gamma + \delta$$

$$\phi - \beta = -(\gamma + \delta)$$

### 4.- Distancia Máxima de Radiación:

Este apartado se explicará por medio del siguiente ejercicio:

Ejercicio 1:

Se quiere realizar un levantamiento a  $E=1/200$ , con un taquímetro de minutos de las siguientes características:

A = 30X  
s = 30"  
K = 100  
ee+es=2,5cm

para la medición de las distancias dispondremos de tres posibilidades:

Mira:

$$e_r = 0.29\%$$

Cinta:

$$E_t = 0.00032 * L + 0.0022\sqrt{L}$$

Distanciómetro:

$$E_l = 5\text{mm} + 3\text{ppm}$$

Calcular cual será la distancia max. de radiación y que instrumento utilizaremos.

Pasos:

1. Cálculo de la distancia máxima en función del ET.
2. Cálculo de la distancia máxima en función del EL.

Tolerancia:

$$T = 0.0002\text{mm} * 200 = 0.04\text{m}$$

**Cálculo de la D en función del ET:**

$$e_v = \frac{1}{12} s'' = \frac{1}{12} 92'' = 7.7''$$

$$e_y = \frac{30}{A} \left( 1 + \frac{4A}{100} \right) = \frac{30}{30} \left( 1 + \frac{4 \cdot 30}{100} \right) = 2.2''$$

$$e_d = \left( \frac{e_e + e_s}{D} * r \right) = \frac{0.025m}{D} * 636620''$$

$$e_i = \frac{2}{3} a = \frac{2}{3} * 100'' = 66.7''$$

$$e_a = \sqrt{e_v^2 + e_y^2 + e_d^2 + e_i^2}$$

$$E_T = \frac{e_a * \sqrt{2} * D}{r''};$$

$$E_T^2 = \left( \frac{e_a * \sqrt{2} * D}{r''} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{E_T^2 * r^2}{2} = (e_v^2 + e_y^2 + e_d^2 + e_i^2) * D^2 = ((e_v^2 + e_y^2 + e_i^2) * D^2) + ((e_e + e_s)^2 * r^2) \Rightarrow$$

$$D_{\max} = \sqrt{\frac{\frac{E_T^2 * r^2}{2} - ((e_e + e_s)^2 * r^2)}{(e_v^2 + e_y^2 + e_i^2)}} = 125.43m$$

**Cálculo de la D en función del EL:**

**Mira:**

$$e_y = 0.29\%$$

$$E_L = e_y * D \Rightarrow$$

$$0.04 = 0.29\% * D \Rightarrow$$

$$D = 0.04m / 0.0029 = 13.79m$$

Se podrá utilizar la mira pero las distancias a las que se podrá medir serán muy cortas.

Cinta Métrica:

$$E_L = 0.00032 * L + 0.0022 * \sqrt{L} \Rightarrow$$

$$E_L^2 = 0.00032^2 * L^2 + 0.0022^2 * (\sqrt{L})^2 \Rightarrow$$

$$0.04^2 = 0.00032^2 * L^2 + 0.0022^2 * L \Rightarrow$$

$$L = 68.22m$$

Con la cinta métrica también podremos radiar pero solo hasta 68 m

Distanciómetro:

5mm+3ppm=0.04m=>

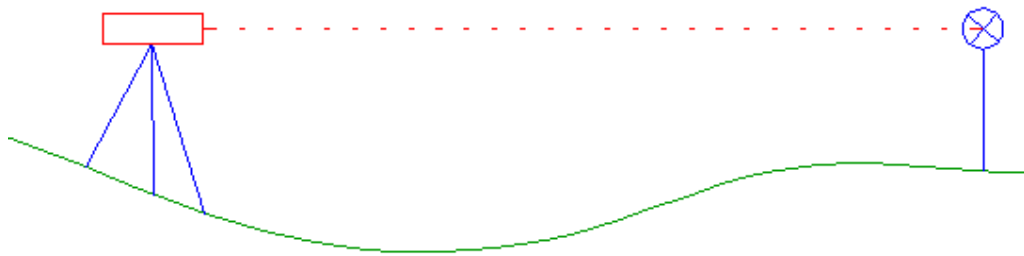
Podremos cometer un error de 35mm por lo que por medio de una regla de 3 calcularemos la dist. máxima de radiación.

$$\frac{1km}{3mm} = \frac{D_{km}}{35mm} \Rightarrow$$
$$D_{km} = \frac{35mm * 1km}{3mm} = 11.67km$$

Con el distanciómetro podremos hacer mediciones hasta 11.67 km; pero como el ET es de 125.4m, no podremos realizar mediciones superiores a esta longitud.

**Resumen:** La distancia máxima de radiación será de 125.43m y el instrumento ha utilizar será el Distanciómetro.

**Anexo:** El distanciómetro es un buen instrumento pero hay que utilizarlo en buenas condiciones, lo que quiere decir que hay que introducirle la Presión, la Tª y la constante del prisma.



Las distancias por tanto saldrán corregidas en función de la presión y de la Tª.

**Problema:**

Un distanciómetro nos ha dado 1000 m en la medición de una distancia. En ese momento la observación se realizó con las siguientes ctes. atmosféricas:

$$\begin{aligned} \text{Presión} &= 850\text{mb} \\ T^a &= 30^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Pero en el momento de la medida las Ctes. eran otras:

$$\begin{aligned} \text{Presión} &= 970\text{mb} \\ T^a &= 10^\circ\text{C} \end{aligned}$$

¿Cuál será la verdadera distancia medida?

$$D_{\text{Punto A}} = D' + \text{correccion} \Rightarrow$$
$$D' = D_{\text{Punto A}} - \text{correccion} \Rightarrow$$
$$D' = 1000m - 0.060 = 999,940m$$

$$D_{\text{Punto A}} = 999.940m + 0.015m = 999.955m$$

Por tanto la D correcta será de 999.955m

(Los datos de corrección se cogen a partir del diagrama de corrección atmosférica, el cual es proporcionado por el fabricante).

**ITINERARIOS Y POLIGONALES**

	$R_A^1$	D	LV	
1	A	$R_1^A$	D	LV
1	2	$R_1^2$	D	LV
2	1	$R_2^1$	D	LV
2	B	$R_2^B$	D	LV
B	2	$R_B^2$	D	LV

Se ha de vigilar en todo momento que coincidan los rumbos y las distancias para detectar cualquier posible fallo en campo.

$$R_A^1 = R_1^A - 180^\circ$$

$$D_A^1 = D_1^A$$

**Ventajas:**

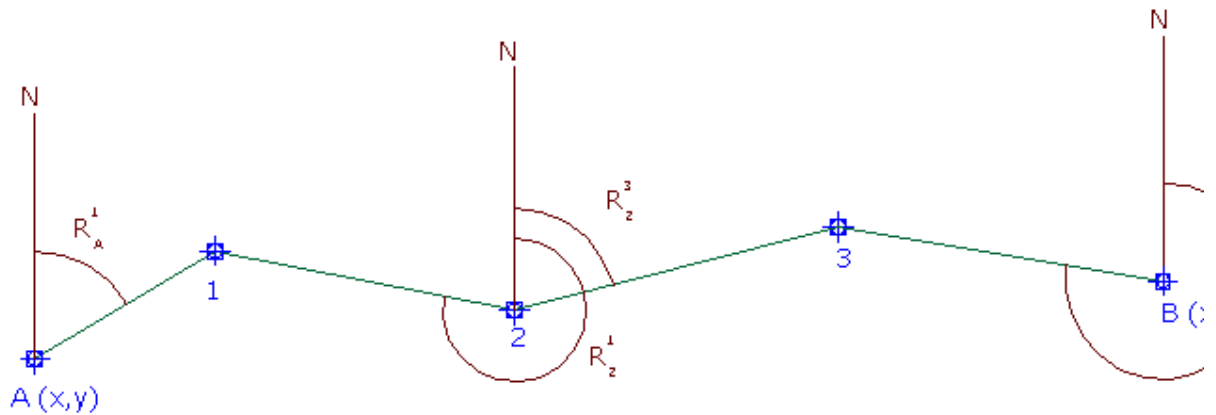
Se puede conocer con facilidad en que vértice se ha errado sino cierra el itinerario, y corregir las mediciones desde ese punto.

**Inconvenientes:**

Hay que tener mucho cuidado con las anomalías magnéticas.

**2.- Itinerario con brújula con estaciones alternas:**

Se han de conocer las coordenadas del punto inicial y preferiblemente las del final también, estacionando en una estación si y en otra no.



Est	Pto	Rumbo	Distancia	LV
A	1	$R_A^1$	D	LV
2	1	$R_2^1$	D	LV

2	3	$R_2^3$	D	LV
B	3	$R_B^3$	D	LV

**Ventajas:**

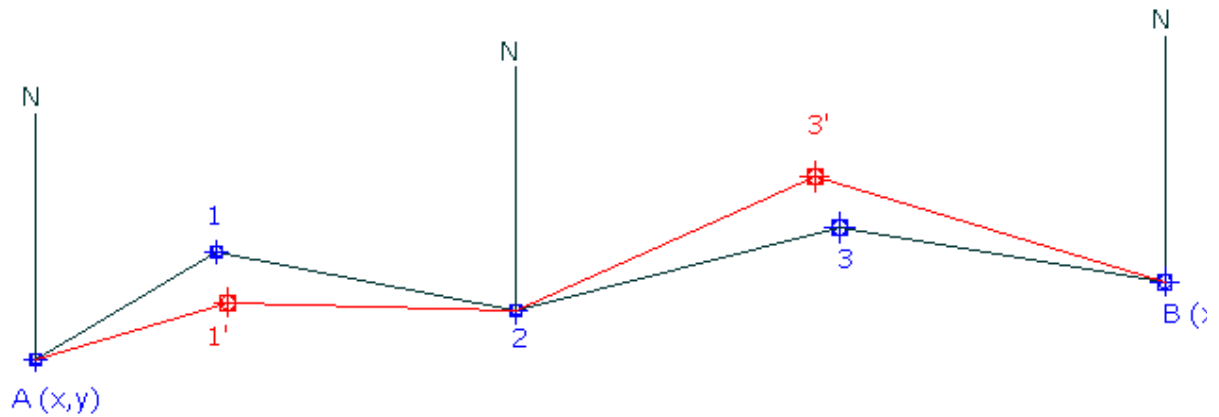
Rapidez.

**Inconvenientes:**

Solo se hacen las observaciones una vez, por lo que si al final no cierra habrá que repetir la poligonal entera. (Se usa muy poco por este problema).

**3.- Itinerario con brújula con estaciones alternas con la variante de puntos de control.**

Con esta variante se consigue que saliendo desde un punto A de coordenadas conocidas y haciendo lecturas de 2 a 1 y 1' nos den las coordenadas de 2. Siendo el error la posible diferencia tolerable.



**3.- Tolerancias:**

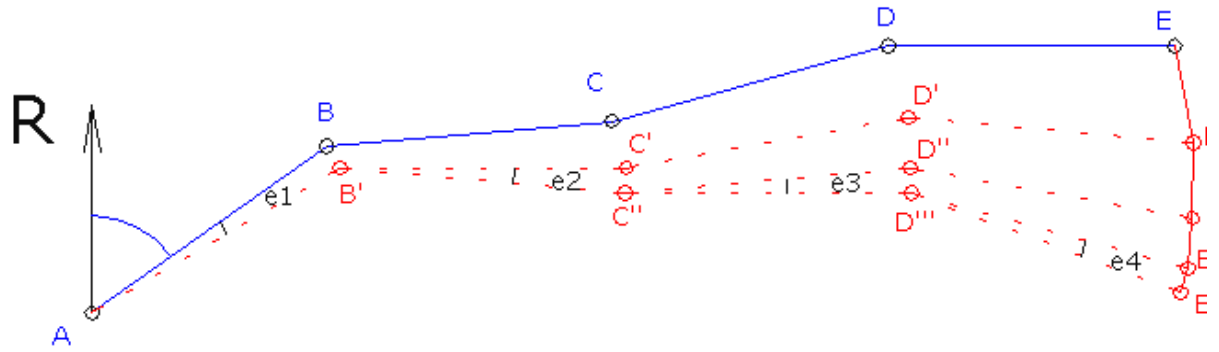
**3.1.- Errores transversales:**

Se simplifica considerando el itinerario prácticamente rectilíneo con tramos de longitudes prácticamente iguales.

**3.1.1.- Taquímetro:**

Consideraremos L igual a la longitud total del itinerario y n al número total de tramos que forman el itinerario.





Caso en el que se comete un error ( $e_1$ ) solamente en la primera estación:

$$EE' = \frac{L}{n} n * e_1 = L * e_1$$

Caso en el que se vuelve a cometer un segundo un segundo error ( $e_2$ ) en la siguiente estación:

$$E'E'' = \frac{L}{n} (n-1) * e_2$$

.....

Caso de cometer un enesimo error angular en:

$$E^{n-1}E^n = \frac{L}{n} * e_n$$

Por tanto el ET será:

$$E_T = \sqrt{\left(\frac{L}{n}\right)^2 n^2 e_1^2 + \left(\frac{L}{n}\right)^2 (n-1)^2 e_2^2 + \dots + \left(\frac{L}{n}\right)^2 e_n^2}$$

Como para medir cada ángulo se usan 2 visuales, CD y CI, el ea que se comete en cada estación quedará multiplicado por raíz de dos, el cual corresponde con el máximo error que se comete en cada estación,

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n = e_a \sqrt{2}$$

quedando entonces el ET;

$$E_T = \frac{L}{n} e_a \sqrt{2} \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1}$$

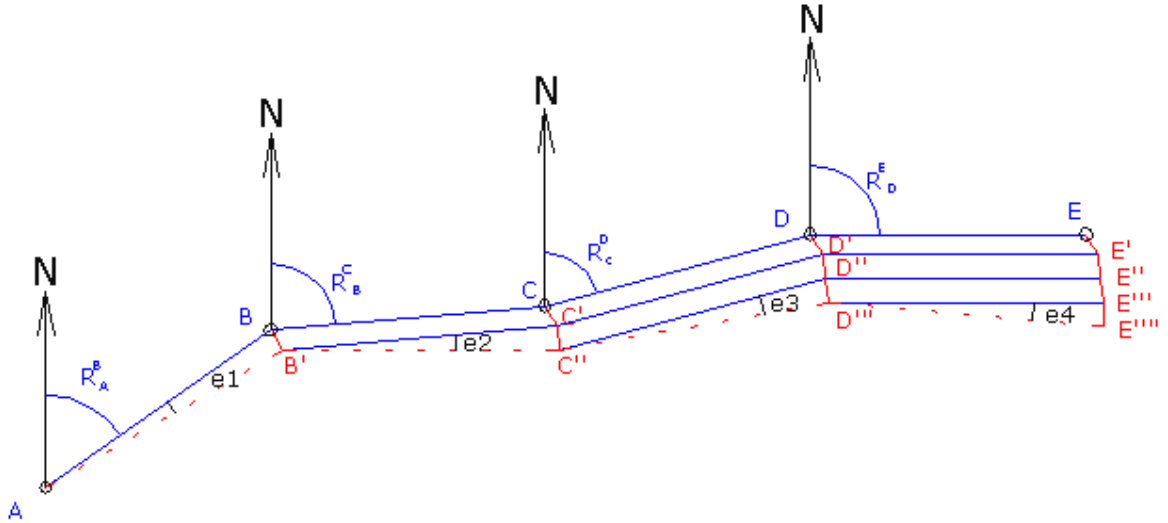
que simplificado queda queda como sigue;

$$E_T = \frac{L}{n} \frac{e_a}{r^{cc}} \sqrt{2} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

(Nota: No olvidar dividir el ea por un radian)

### 3.1.1.- Brújula:

En este caso, al contrario que en el anterior, cada error angular solo se produce una única vez tal y como se aprecia en la figura inferior, ya que el instrumento se auto-orienta en cada estación.



Por tanto si consideramos  $L$  como la longitud total del itinerario y  $n$  igual al numero de tramos del itinerario, podemos calcular el error en cada tramo como sigue:

$$BB' = EE' = \frac{L}{n} e_1;$$

$$C'C'' = E'E'' = \frac{L}{n} e_2;$$

$$E^{n-1}E^n = \frac{L}{n} e_n$$

Por lo que para calcular el ET de toda la poligonal realizaremos la componente cuadrática de los errores producidos en cada estación.

$$E_T = \sqrt{\left(\frac{L}{n}\right)^2 e_1^2 + \left(\frac{L}{n}\right)^2 e_2^2 + \dots + \left(\frac{L}{n}\right)^2 e_n^2}$$

que simplificando queda:

$$E_T = \frac{L}{n} \frac{e_a}{r''} \sqrt{n}$$

### 3.2.- Errores lineales:

Los errores lineales quedan representados por el Error Longitudinal **EL**.

Suponiendo que se comete un error en todas las estaciones y en todas por igual, el error longitudinal quedara representado por la siguiente función.

$$E_L = \left( \frac{L}{n} \right) e_r \sqrt{n}$$

EL será igual tanto para la brújula como para el taquímetro.

er ---> Error relativo del instrumento (mira, prisma, cinta).

### 3.3.- Error total en una poligonal:

El ETtotal será el mayor de los 2 errores, transversal o longitudinal, ya que ambos errores son perpendiculares entre sí. Por lo que la posibilidad de que se den a la vez es mínima, de la razón de 1/2500.

"No hacer la componente cuadrática del ET y el EL, error muy grave"

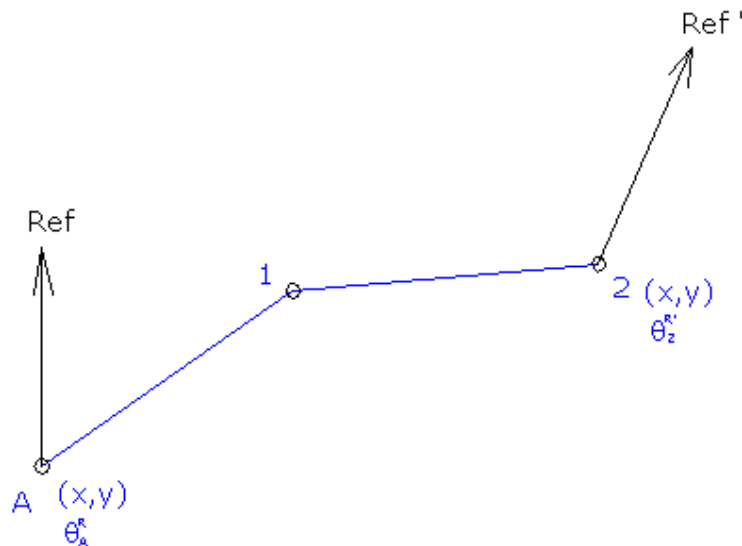


### 4.- Azimutes:

#### 4.1.- Cálculo. Reducción al origen:

##### Cálculo de Azimutes:

Este cálculo se realiza cuando la poligonal va desorientada.



Deberemos de conocer las coordenadas de la estación y las de un punto de referencia. Para tener comprobación de la poligonal deberemos conocer también las coordenadas de la última estación y las de una referencia.

Para el cálculo de Azimutes disponemos de **2 métodos**:

- Cálculo de ángulos
- Por desorientación.

• **Cálculo de ángulos:**

Proceso de cálculo basado en la poligonal representada en la imagen anterior :

$\hat{A} = L_A^R - L_A^1$	$\hat{1} = L_1^A - L_1^2$	$\hat{2} = L_2^1 - L_2^R$
$\theta_A^1 = \theta_A^R + \hat{A} - 200^\circ$	$\theta_1^2 = \theta_1^A - \hat{1}$	$\theta_2^R = \theta_2^1 \pm 200^\circ$
$\theta_1^A = \theta_1^1 \pm 200^\circ$	$\theta_2^1 = \theta_2^2 \pm 200^\circ$	

Error de cierre:

$$\text{Error\_de\_cierre} = e_c = \theta_2^{1R} - \theta_2^R$$

$\theta_2^{1R}$  -----> Azimut Calculado

$\theta_2^R$  -----> Azimut Verdadero

• **Cálculo de ángulos por desorientación:**

Proceso de cálculo basado en la poligonal representada en la imagen anterior :

$\Sigma_A = \theta_A^R - L_A^R$	$\Sigma_1 = \theta_1^A - L_1^A$	$\Sigma_2 = \theta_2^1 - L_2^1$
$\theta_A^1 = \Sigma_A + L_A^1$	$\theta_1^2 = \Sigma_1 + L_1^2$	$\theta_2^{1R} = \Sigma_2 + L_2^R$
$\theta_1^A = \theta_1^1 \pm 200^\circ$	$\theta_2^1 = \theta_2^2 \pm 200^\circ$	

Error angular de cierre de la poligonal:

$$\text{Error\_de\_cierre} = e_c = \theta_2^{1R} - \theta_2^R$$

**Reducción al Origen:**

En la práctica las lecturas en CD y en CI suelen variar aún estando el instrumento orientado, lo que nos obliga a igualar las lecturas, conocer el error de cierre de la poligonal.

El método se explica a continuación a través de un ejercicio ejemplo:

Tenemos una libreta de campo en la cual nos dan los ejes y azimutes observados, de una poligonal, de la cual se conocen de antemano los siguientes datos:

A-R= 105g47c00cc

F-R'= 31g58c00cc

Calcular la reducción al origen de las observaciones, el error de cierre y los azimutes compensados.

Ejes	Azimutes observados		Corrección		Azimutes al origen	
	Directo	Inverso	Directo	Inverso	Directo	Inverso

A-R	105.48	---	---	---	105.47	---
A-B	108.19	308.18	-1	0	108.18	308.18
B-C	123.25	323.26	0	-1	123.25	123.25
C-D	156.56	356.54	-1	+1	156.55	356.55
D-E	245.45	45.46	+1	+0	245.46	45.46
E-F	186.23	386.22	+0	+1	186.23	386.23
F-R'	31.52	---	+1	---	31.53	---

Por tanto el error de cierre será:

$$e_c = (FR'_{Al\_origen}) - (FR'_{Verdadero}) \Rightarrow$$

$$e_c = 31^{\circ}53' - 31^{\circ}58' \Rightarrow$$

$$e_c = -5'$$

Comprobamos si el error de cierre es tolerable angularmente:

$$T_a \leq e_a \sqrt{2} \sqrt{n} = e_a \sqrt{2n}$$

$$e_c \leq T_a$$

(Ver apartado 4.2)

Suponemos que es tolerable para este ejemplo y compensamos (en el caso de que no sea tolerable no se compensara, habrá que volver a realizar la poligonal.).

Factores a tener en cuenta en la compensación:

- La corrección a realizar en cada estación será igual al  $e_c$  dividido entre el  $n^{\circ}$  de tramos.
- No se puede compensar por debajo de la apreciación del aparato utilizado.
- Las correcciones se irán acumulando.
- Si hay que dar mas corrección a unas lecturas que a otras por no ser el  $e_c$  múltiplo del numero de estaciones, se les dará mayor error a las últimas. A no ser que se sepa que se a cometido más error en unas estaciones que en otras.

Compensación (Ver apartado 4.2):

Ejes	Azimutes al origen		Corrección	Azimutes compensados
	Directo	Inverso		
A-R	105.47	---	+0	105.47
A-B	108.18	308.18	+0	108.18
B-C	123.25	123.25	+1	123.26
C-D	156.55	356.55	+2	156.57
D-E	245.46	45.46	+3	245.49
E-F	186.23	386.23	+4	186.27
F-R'	31.53	---	+5	31.58

#### 4.2. Tolerancia y compensación azimutal:

*Si una poligonal no es tolerable no se compensa, se repite la medición.* (Tener siempre mucho cuidado con este detalla)

**Tolerancia para una estación,**

$$T = ea\sqrt{2}$$

**Tolerancia para varias estaciones,**

$$T = e_a\sqrt{2}\sqrt{n} = e_a\sqrt{2n}$$

$$T = e_a\sqrt{2n}$$

n = número de estaciones, no tramos.

$\sqrt{2}$  = por tener lecturas en CD y CI.

**Compensación Azimutal:**

Se compensará siempre la apreciación o un múltiplo de la misma, nunca menos de la apreciación. (Tener mucho cuidado con este detalle, suele ser un error típico y grave.)

Por lo general el ec será dividido entre el numero de estaciones de la poligonal, y de dar a alguna lectura mayor error siempre se le dará a las últimas.

Además de esto a cada estación se le corregirá el error propio mas el de las anteriores, debido a que se acumula. La compensación se comprueba al final ya que si se hace mal no nos dará el verdadero error de cierre.

Ejemplos:

1.- Se tiene un instrumento con una apreciación de 1c, con el cual se ha medido una poligonal formada por 5 estaciones y se ha obtenido un error de cierre de 3c. ¿Realizar la posible compensación?

1º.- Suponemos que es tolerable la poligonal ya que no nos dicen nada.

2º.- Se observa que el error de cierre no es múltiplo del número de estaciones, y que si dividimos el error de cierre entre el numero de estaciones nos da un error menor al de la apreciación del aparato, por lo que se compensará con la apreciación a las últimas estaciones.

Est	Compensación
Est1	0
Est2	0
Est3	1
Est4	1
Est5	1

3º.- Tener en cuenta que los errores se acumulan por lo que la compensación quedará como sigue.

Est	Compensación+Acumulación
Est1	0
Est2	0
Est3	1
Est4	2
Est5	3

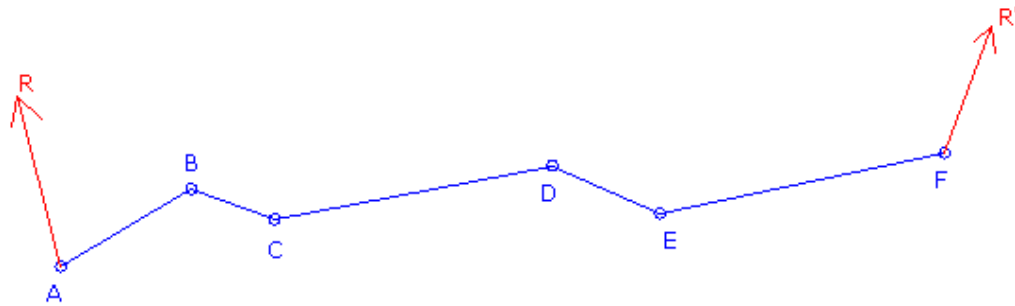
2.- Se tiene un instrumento con una apreciación de 1c, con el cual se ha medido una poligonal formada por 5 estaciones y se ha obtenido un error de cierre de 7c. ¿Realizar la posible compensación?

Aquí nos encontramos en la misma situación que en el ejemplo anterior, el error de cierre no es múltiplo del numero de estaciones. Por lo que para realizar esta compensación procederemos como sigue:

Est	Compensación	Compensación+Acumulación
Est1	1	1
Est2	1	2
Est3	1	3
Est4	2	5
Est5	2	7

## 5.- Cálculo.

### 5.1.- Coordenadas parciales. Error de cierre.



Cálculo de las coordenadas parciales:

$$\Delta x_A^{iB} = D_A^B \text{sen} \theta_A^B$$

$$\Delta y_A^{iB} = D_A^B \text{cos} \theta_A^B$$

$$\Delta x_B^{iC} = D_B^C \text{sen} \theta_B^C$$

$$\Delta y_B^{iC} = D_B^C \text{cos} \theta_B^C$$

.....

.....

$$\Delta x_F^{iF} = D_F^F \text{sen} \theta_F^F$$

$$\Delta y_F^{iF} = D_F^F \text{cos} \theta_F^F$$

Cálculo del incremento de las coordenadas parciales:

$$\Delta x_A^{iF} = \Delta x_A^{iB} + \Delta x_B^{iC} + \dots + \Delta x_F^{iF}$$

$$\Delta y_A^{iF} = \Delta y_A^{iB} + \Delta y_B^{iC} + \dots + \Delta y_F^{iF}$$

Calculo del incremento por medio de las coordenadas verdaderas de los extremos de la poligonal:

$$\Delta x_A^F = x_F - x_A$$

$$\Delta y_A^F = y_F - y_A$$

Cálculo del error en "x" y en "y":

$$e_x = \Delta x_A^{iF} - \Delta x_A^F$$

$$e_y = \Delta y_A^{iF} - \Delta y_A^F$$

El error de cierre de una poligonal, por tanto, estará influenciado por tres causas diferentes:

- 1º.- Mayor precisión en ángulos.
- 2º.- Mayor precisión en distancias.
- 3º.- Igual precisión en ángulos que en distancias.

De esta manera, nos encontramos con tres casos en la precisión:

$E_T > E_L \rightarrow$  Poligonal más precisa en distancias.

$E_T < E_L \rightarrow$  Poligonal más precisa angularmente.

$E_T = E_L \rightarrow$  Poligonal con la misma precisión tanto transversal como longitudinalmente.

Por tanto, se hace necesario el cálculo de un factor K que nos indique la precisión de la poligonal, el cual variará según la precisión de la poligonal:

$$E_L \rightarrow K = e_r$$

$$E_T \rightarrow K = \frac{e_a}{r^{cc}}$$

De tal modo que según en el caso que nos encontremos escogeremos un K u otro.

$$E_T > E_L \Rightarrow K = \frac{e_a}{r^{cc}}$$

$$E_T < E_L \Rightarrow K = e_r$$

$$E_T = E_L \Rightarrow \text{Indiferente}$$

(En el caso en el que el ET y el EL sean diferentes se escogerá siempre el peor caso nunca la media)

#### **Tolerancia:**

En las poligonales como ya se ha podido observar tenemos dos tolerancias, una en X y otra en Y. Las cuales se calculan de 2 formas diferentes dependiendo de la precisión de las mismas.

Si el ET = EL :

$$T = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq K \sum D$$

D = Distancia de cada tramo

Si son diferentes las precisiones se usará el factor K del peor caso:

$$T_x = K * \sum |\Delta x|$$

$$T_y = K * \sum |\Delta y|$$

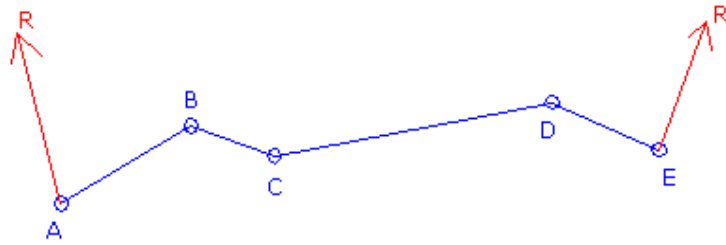
Si la poligonal no es tolerable no se compensará.

#### **5.2.- Elipse de tolerancia:**

La elipse de tolerancia es un método gráfico para ver la tolerancia y la precisión de una poligonal abierta.

**SOLO PARA POLIGONALES ABIERTAS**



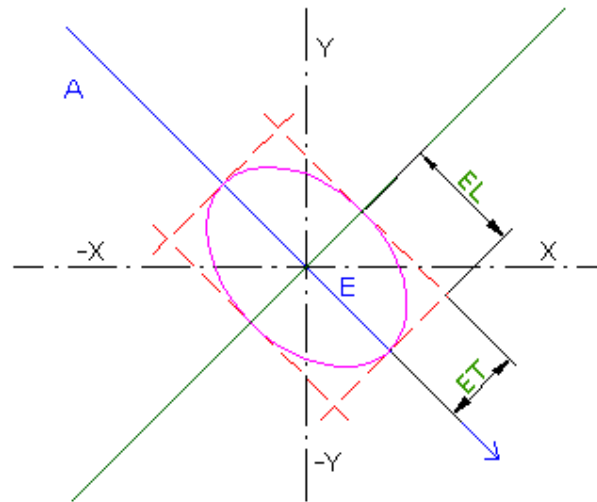


**Dibujado de la elipse de tolerancia:**

- 1º Se traza sobre los ejes de coordenadas pasando por el centro de los mismos la dirección que marca el azimut existente entre A y E.
- 2º A continuación, se traza una recta perpendicular a la dirección del azimut dibujado y que pase por el centro de los ejes de coordenadas.
- 3º Se trazan paralelas a la 2ª recta dibujada a una distancia igual a la del EL máximo.
- 4º Se trazan paralelas al eje que marca el azimut una distancia igual a la del ET máximo.
- 5º Se traza una elipse cuyo centro será el centro de coordenadas de los ejes x e y, y cuyos radios serán el ET y el EL.

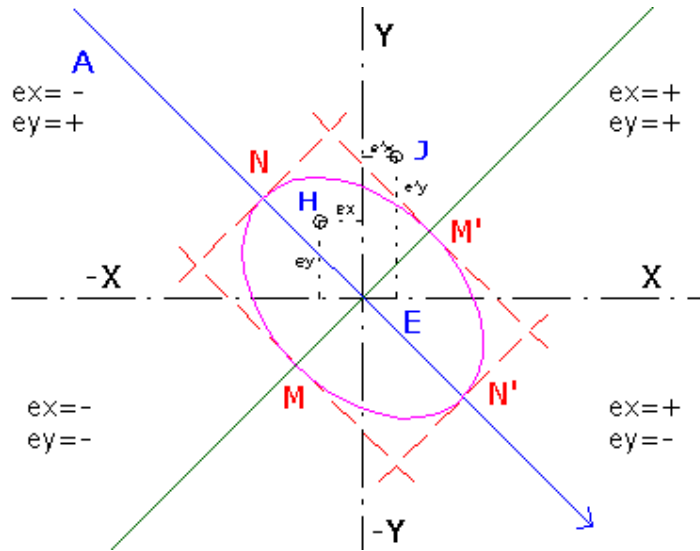
$$E_L = \frac{L}{n} e_r \sqrt{n}$$

$$E_T = \frac{L}{n} \frac{e_a}{r^{cc}} \sqrt{2} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$



**Uso de la elipse de tolerancia:**

Se proyectan sobre los ejes de coordenadas el ex y el ey, si su intersección esta dentro de la elipse de tolerancia la poligonal entrará en tolerancia, de lo contrario no entrará en tolerancia.



En el ejemplo vemos dos casos, el punto H que entra en tolerancia (ex,ey) y el punto J que no entra en tolerancia (e'x, e'y).

Destacar que este es el método menos preciso, dándose el caso de que una poligonal abierta numéricamente puede no ser tolerable y gráficamente si serlo.

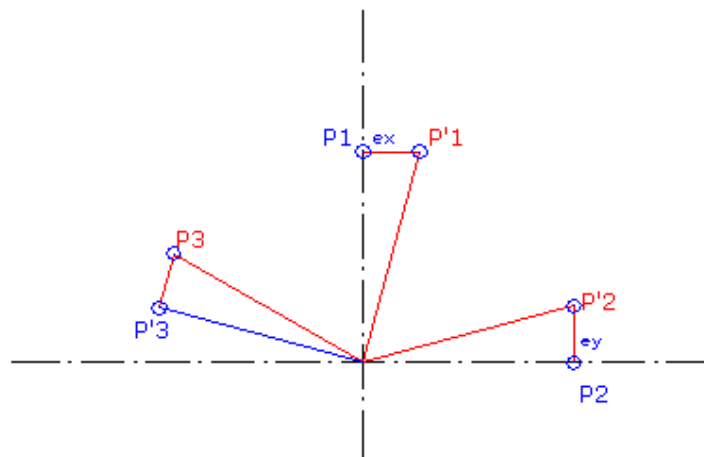
### 5.3.- Compensación:

Tres casos dependiendo de la precisión obtenida al evaluar las distancias y los ángulos:

- o Mayor precisión al evaluar las distancias.
- o Menor precisión al evaluar las distancias.
- o Parecida precisión en la determinación angular y de distancias.

#### Mayor precisión al evaluar las distancias:

En este caso se considerará que no se comete error en las distancias.



Se considera:

$$P1 = (X, 0)$$

$$P2 = (0, Y)$$

de los cuales podemos sacar el error en X y en Y.

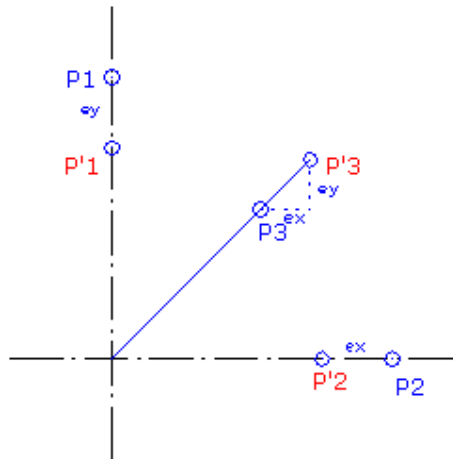
Corrección en y:

$$\begin{cases} e_x \rightarrow \sum |\Delta y| \\ e_{y_i} \rightarrow \Delta y_i \end{cases}$$

Corrección en x:

$$\begin{cases} e_y \rightarrow \sum |\Delta x| \\ e_{x_i} \rightarrow \Delta x_i \end{cases}$$

**Menor precisión al evaluar las distancias:**



En este caso consideraremos:

$$ET = 0$$

$$EL = \text{Única causa de error.}$$

$$P1 = (X, 0)$$

$$P2 = (0, Y)$$

Por tanto el error en "X" y en "Y" se darán en la misma dirección de su eje.

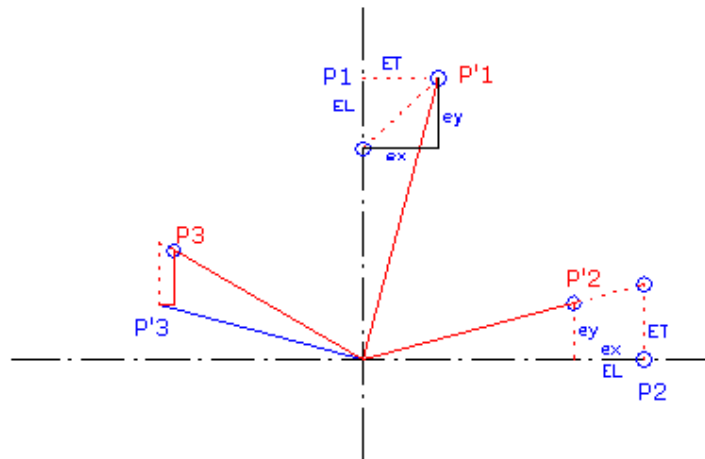
Corrección en X:

$$\begin{cases} e_x \rightarrow \sum |\Delta x| \\ e_{x_i} \rightarrow \Delta x_i \end{cases}$$

Corrección en Y:

$$\begin{cases} e_y \rightarrow \sum |\Delta y| \\ e_{y_i} \rightarrow \Delta y_i \end{cases}$$

Parecida precisión en la determinación angular y de distancias:



En este último caso la magnitud a compensar estará influenciada tanto por el ET como por el EL.

Para calcular el error cometido se consideran:

$$P1 = (X, 0)$$

$$P2 = (0, Y)$$

Corrección en X:

$$\begin{cases} e_x \rightarrow \sum D \\ ex_i \rightarrow Di \end{cases}$$

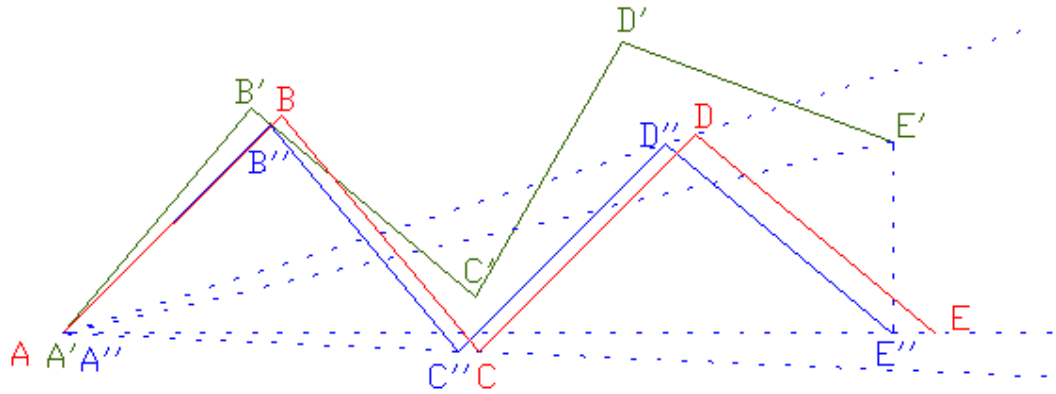
Corrección en Y:

$$\begin{cases} e_y \rightarrow \sum D \\ ey_i \rightarrow Di \end{cases}$$

"Hay que tener siempre en cuenta el método que se va a usar ya que los resultados son diferentes."

**\* Compensación por el método de de Sanguet:**

Este método es totalmente diferente a los anteriores, siendo bastante más preciso debido a que se aproxima más al método de los mínimos cuadrados. Este método lo usaremos solo si se nos pide, sino se utilizarán los anteriores.



- 1º.- En verde tenemos la poligonal sin corregir.
- 2º.- Se corrige el error de cierre, haciendo girar a toda la poligonal, poligonal azul.
- 3º.- En rojo la poligonal corregida tras corregir la poligonal en distancias.

(Falta problema ejemplo por incluir y comprobar)

**5.4.- Coordenadas generales:**

A (x ,y) conocido

$x_B = x_A + \Delta x_A^B$	$y_B = y_A + \Delta y_A^B$
$x_C = x_B + \Delta x_B^C$	$y_C = y_B + \Delta y_B^C$
.....	.....

Antes de realizar los cálculos es recomendable ver si la compensación se ha realizado correctamente, por medio de las siguientes propiedades.

Poligonal Cerrada:

$\sum \Delta x = 0$	$\sum \Delta y = 0$
---------------------	---------------------

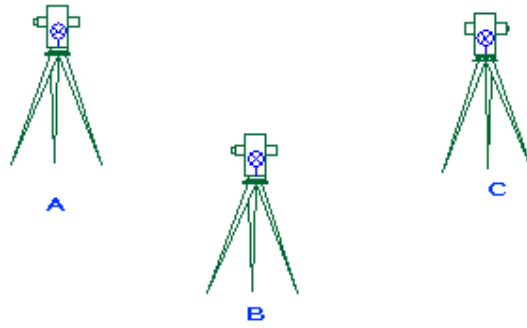
Poligonal Abierta:

$\sum \Delta x = X_{\text{punto\_llegada}}$	$\sum \Delta y = Y_{\text{punto\_llegada}}$
---	---

**6.- Itinerarios especiales:**

**6.1.- Centrado Forzado:**

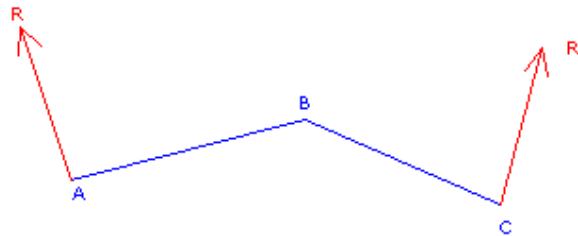
Elimina el error de dirección, ya que se suprime el error de estacionamiento y el de señalización gracias al uso de varios tripodes a la vez, como mínimo tres, manteniendo 3 estaciones fijas en todo momento, sustituyendo los prismas y un teodolito para hacer las observaciones.



Material:

- Plomada óptica o bastón centrador.
- Tres trípodes (mínimo).
- Dos prismas (mínimo).
- Un teodolito con distanciómetro(mínimo).
- Tres basadas.
- Cinta métrica para medir la altura del instrumento.

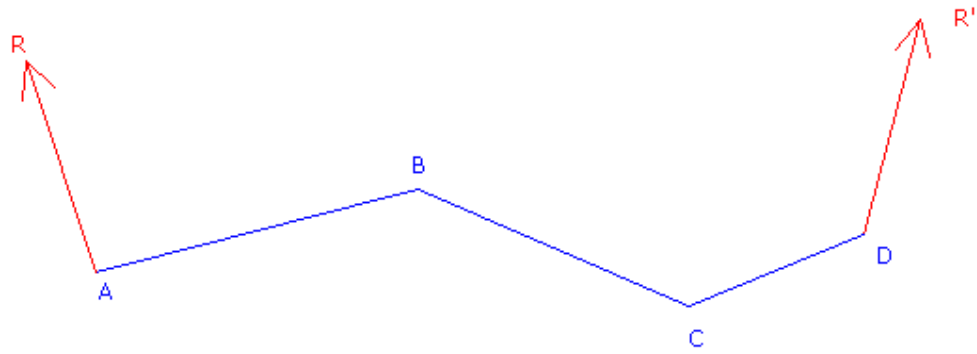
Estadillo ejemplo:



De	A		Datos		
	CD	CI			
A	R	R	LH		
---	B	B	LH	LV	D
B	A	A	LH		
---	C	C	LH	LV	D
C	B	B	LH		
---	R'	R'	LH		

### 6.2.- Moinot:

Itinerario más utilizado ya que todos los datos se toman por duplicado (CD y CI), lo que hace que se pueda encontrar cualquier error con facilidad.



De	a	CD		CI		D
		LH	LV	LH	LV	
A	Ref	LH	---	---	---	---
---	B	LH	LV	---	---	D
---	B	---	---	LH	LV	D
---	Ref	LH	---	---	---	---
B	A	LH	LV	---	---	D
---	C	LH	LV	---	---	D
---	C	---	---	LH	LV	D
---	A	---	---	LH	LV	D
---	---	---	---	---	---	---

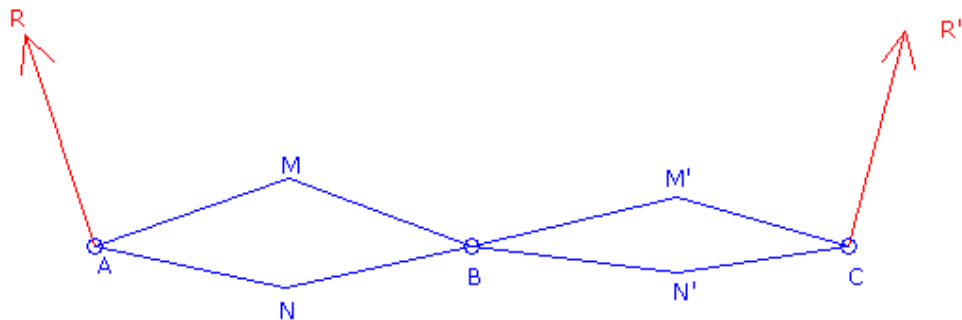
Tolerancia:

Como la distancia se mide 4 veces y el ángulo 2 veces, la tolerancia será igual al ea por raíz de 8.

$$T = ea\sqrt{2}\sqrt{4} = ea\sqrt{8}$$

### 6.3.- Porro:

Método utilizado para alargar los tramos el cual consiste en estacionar en un pto A y se orienta a una referencia R de azimut conocido. Se sitúan por radiación M y N, y nos estacionamos en un pto B volviendo a radiar hacia los puntos M y N, con el instrumento desorientado ya que A no es visible. Se continuará así hasta llegar al punto final de la poligonal.



Inconveniente: No son visibles las estaciones, entre sí.

Estadillo:

De	a	CD		CI		D
		LH	LV	LH	LV	
A	Ref	LH	---	---	---	---

---	M	LH	LV	---	---	D
---	N	LH	LV	---	---	D
---	M	---	---	LH	LV	D
---	N	---	---	LH	LV	D
---	Ref	LH	---	---	---	---
B	M	LH	LV	---	---	D
---	N	LH	LV	---	---	D
---	M'	LH	LV	---	---	D
---	N'	LH	LV	---	---	D
---	N'	---	---	LH	LV	D
---	M'	---	---	LH	LV	D
---	N	---	---	LH	LV	D
---	M	---	---	LH	LV	D
C	R'	LH	LV			
---	---	---	---	---	---	---

Obtención de coordenadas relativas:

$$X_A^M = \overline{AM} * \text{sen} \vartheta \quad Y_A^M = \overline{AM} * \text{cos} \vartheta$$

$$X_A^N = \overline{AN} * \text{sen} \vartheta \quad Y_A^N = \overline{AN} * \text{cos} \vartheta$$

$$X_B^M = \overline{BM} * \text{sen} \vartheta \quad Y_B^M = \overline{BM} * \text{cos} \vartheta$$

$$X_B^N = \overline{BN} * \text{sen} \vartheta \quad Y_B^N = \overline{BN} * \text{cos} \vartheta$$

Cálculo del azimut entre M y N:

$$\text{tg} \theta_M^N = \frac{\Delta x_A^N - \Delta x_A^M}{\Delta y_A^N - \Delta y_A^M}$$

$$\text{tg} \theta_M^{iN} = \frac{\Delta x_B^{iN} - \Delta x_B^{iM}}{\Delta y_B^{iN} - \Delta y_B^{iM}}$$

Desorientación:

$$\sum B = \theta_M^N - \theta_M^{iN}$$

Para el cálculo de la desorientación de C se hará de la misma

Se operará igualmente con el resto de tramos.

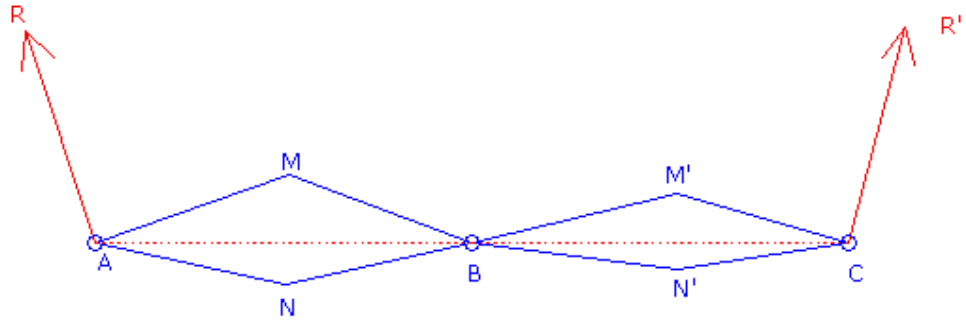
Este método a pesar de doblar la distancia entre estaciones no visibles tiene dos graves inconvenientes:

- Gran abundancia de cálculos.
- Los errores pueden llegar a ser muy grandes debido al error de dirección, pudiendo producir grandes deformaciones en la poligonal.

#### 6.4.- Villani:

El método de Villani evita los graves inconvenientes del método de Porro. Ya que a diferencia de este con villani dos estaciones consecutivas han de ser visibles ente sí, pudiendose deducir las S por medio de las visuales recíprocas.





1º.- Se calculará el error de cierre azimutal y se compensará.

2º.- Dedución de coordenadas.

$$X_A^M = AM * \text{sen} \theta_A^M$$

$$Y_A^M = AM * \text{cos} \theta_A^M$$

$$X_B^M = BM * \text{sen} \theta_B^M$$

$$Y_B^M = BM * \text{cos} \theta_B^M$$

#### Cálculo por M

$$X_A^B = X_A^M + X_B^M = X_A^M - X_B^M$$

$$Y_A^B = Y_A^M + Y_B^M = Y_A^M - Y_B^M$$

#### Cálculo por N

$$X_A^B = X_A^N + X_B^N = X_A^N - X_B^N$$

$$Y_A^B = Y_A^N + Y_B^N = Y_A^N - Y_B^N$$

La diferencia entre las coordenadas obtenidas por un lado y por otro habrá de ser concordante, si entra en tolerancia se hará el promedio. Una vez deducidas las coordenadas parciales de toda la poligonal se compensarán los errores de cierre en coordenadas.

### 7.- Precauciones en los itinerarios:

#### I.- Descubrimiento de las faltas:

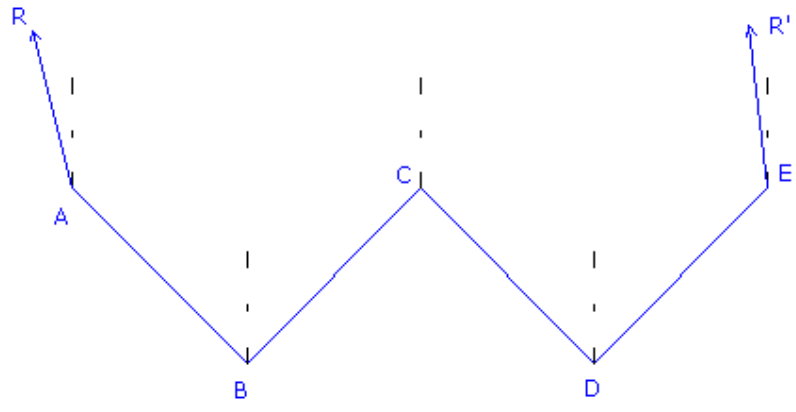
- Tener mucho cuidado con los cálculos, es común equivocar la x con la y, dejarse un signo, etc...
- En el caso de encontrar un error de este tipo, repetir los cálculos.

#### a) Error de cierre angular:

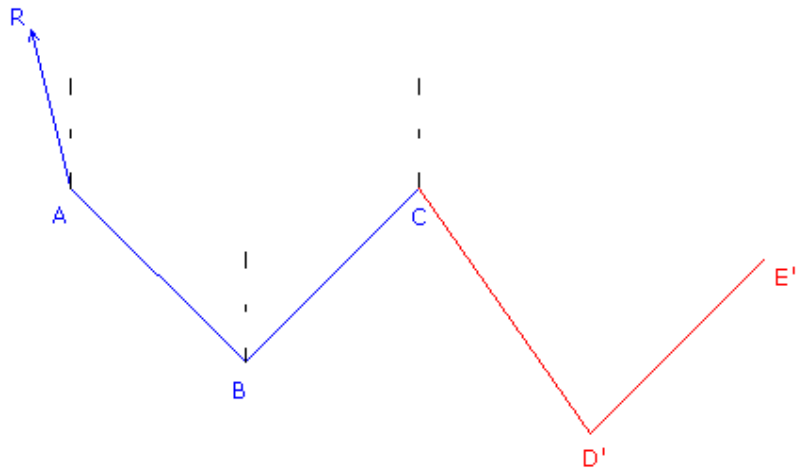
Si es muy grande el error de cierre habrá que intentar detectar donde se ha cometido, siendo solo posible encontrar el punto donde se ha cometido el error si solo se ha cometido un solo error angular y solo uno.

Procedimiento gráfico de detección del error:

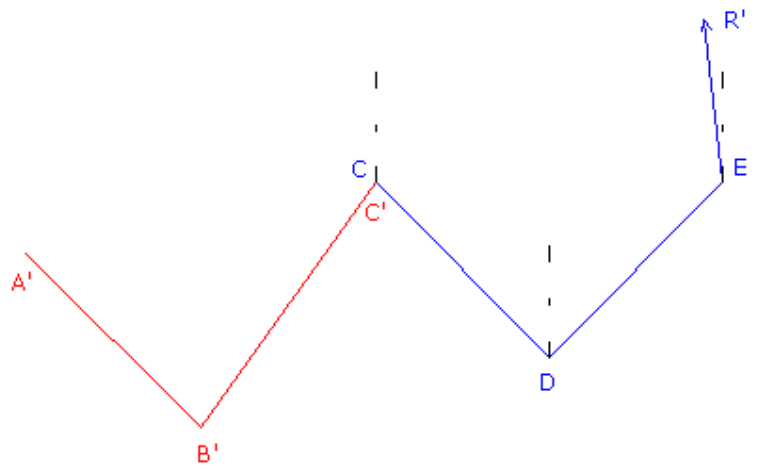
Poligonal sin error



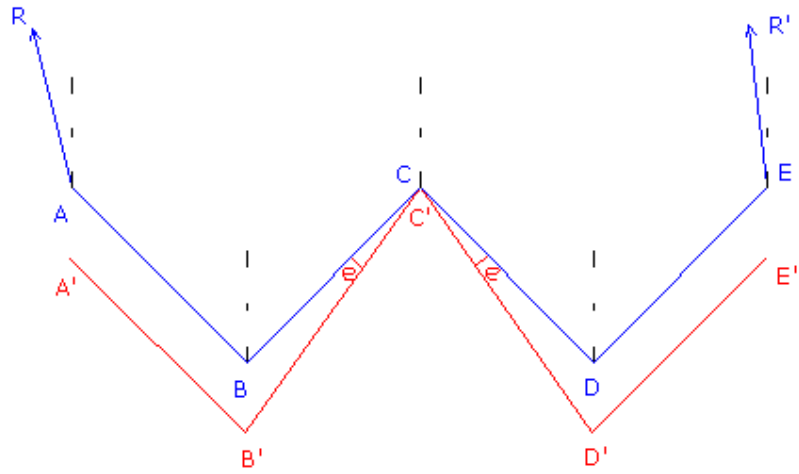
Dibujamos la poligonal desde A hasta E', calculando los acimutes desde A.



Igualmente pero cambiando de dirección calculamos los azimutes desde E hasta A, y dibujamos a continuación la otra poligonal errónea.



La superposición de ambas poligonales erróneas nos indicará donde se ha cometido el error. Siendo ese punto donde más se aproximen las coordenadas de ambas poligonales erróneas.



Y como podemos observar en este caso el error se ha cometido a partir del punto C.

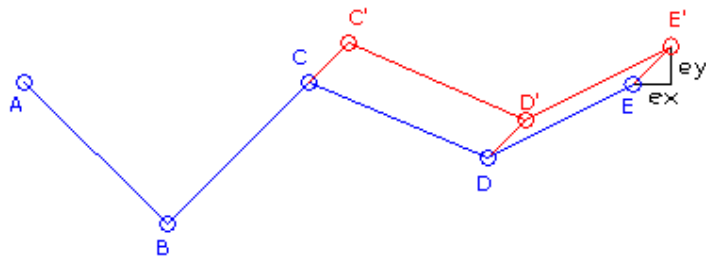
Este procedimiento gráfico sólo es utilizado cuando el error de cierre angular es muy grande, remitiendonos al método numérico cuando se tiene un error angular de cierre no muy grande.

**b) Error de cierre en (x,y) y este es grande, habiendo entrado el ea en tolerancia.**

1º.- Repetir los cálculos para comprobar.

2º.- Detección del error.

Puede darse el caso, como en el ejemplo inferior, que una poligonal tenga un cierre azimutal correcto y que en cambio posea un error grande en el ajuste de coordenadas.



Como se puede observar se ha cometido un solo error al medir el tramo BC lo que hace que:

$$CC'=DD'=EE'$$

Por lo que el tramo EE' no se indicará la dirección en la que se produjo el error, calculando entonces numéricamente la dirección EE':

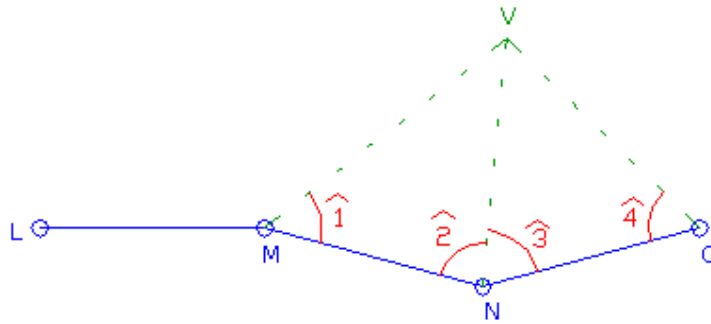
$$\theta_y^{E'} = \arctan\left(\frac{e_x}{e_y}\right)$$

El azimut que mas se aproxime a la dirección EE' (ó su recíproco) será el del tramo cuya longitud es errónea.

**II.- Ajuste inicial del itinerario en puntos inaccesibles.**

Problema no se puede estacionar en esos vértices. Pueden ser por ejemplo campanarios, torres, etc...

Angularmente no se puede conocer el error pero si en coordenadas.



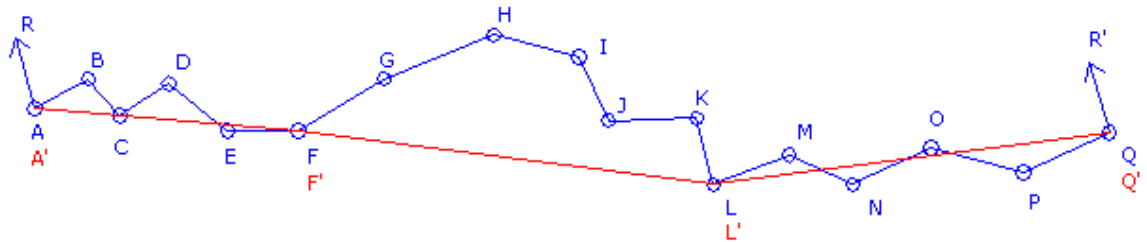
1º. Punto conocido L.

2º. Punto conocido V. (En este no se puede estacionar).

Se miden los ángulos 1, 2, 3 y 4 y se calculan las coordenadas de V por ambos lados y se comprueba.

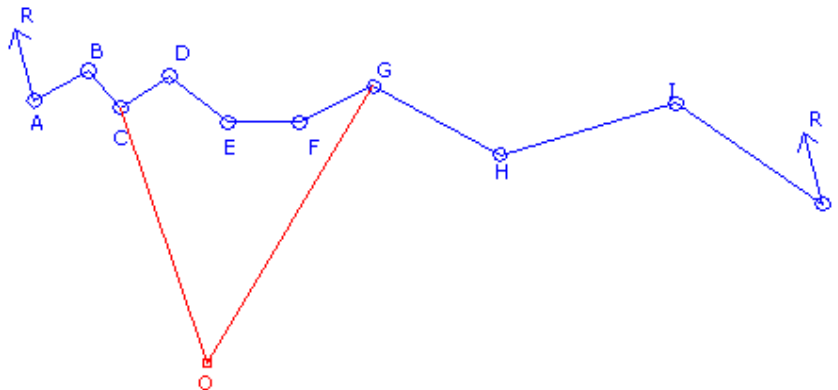
### III.- Método de comprobaciones sucesivas:

Cuando se hace necesario el uso de poligonales de tramos muy cortos e itinerarios muy largos ( red eléctrica, torretas, etc...). Suelen aparecer errores angulares debido a la proximidad de los puntos, este problema es solucionado por el "**Método de comprobaciones sucesivas**".



Cada 6 ó 7 estaciones se coloca un punto de control tomando lectura horizontal. Luego en gabinete se estudia la poligonal entre los puntos de control y se mira si es tolerable azimutalmente

### IV.- Modo de evitar los tramos cortos en los itinerarios:



O = Vértice exterior, el cual es usado como punto de control.

Visuales:

CB	DC	ED	FE	GF
CO	DE	EF	EFG	GO
CD				GH

La poligonal será llevada para el cálculo de azimutes por los tramos largos y por los puntos de control. Se estudiará si entra en tolerancia y en caso afirmativo se compensará la poligonal azimutalmente.

## INTERSECCIÓN DIRECTA

### 1.- Concepto

#### Definición:

Se denomina Intersección directa al método por el cual se obtiene las coordenadas de un punto desconocido visando desde puntos de coordenadas conocidas.

#### Clasificación:

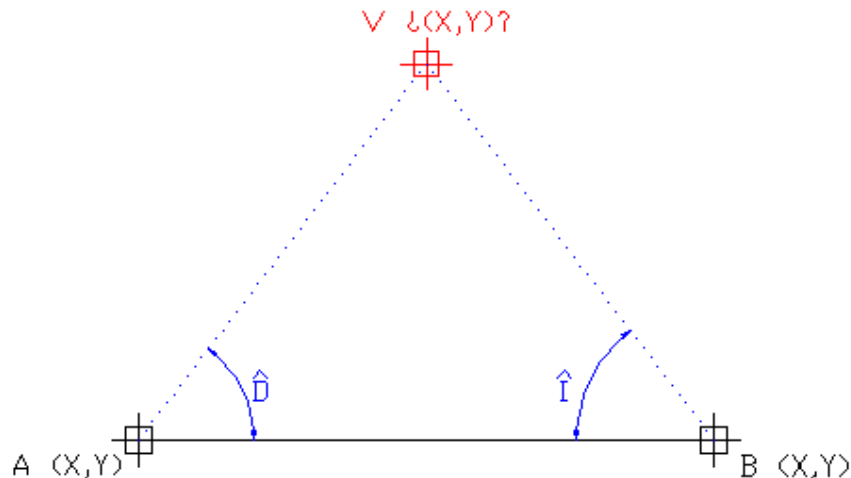
**I. D. Simple:** Se determina las coordenadas del punto desconocido a partir de los datos estrictamente necesarios.

**I.D. Múltiple:** Se tienen más datos de los necesarios, obteniendo así comprobación de los resultados.

Con las intersecciones se obtiene mayor precisión en la fijación de puntos debido a que solo se realizan medidas angulares, las cuales por lo general son de mayor exactitud que las distancias.

### 2.- Intersección directa simple. Cálculo Numérico.

La problemática que se presenta en este método es que solamente se tienen los datos estrictamente necesarios, lo cual no permite tener comprobación.



Para obtener las coordenadas de V podemos seguir dos métodos diferentes, los cuales desarrollo a continuación. No obstante, el segundo método es el más aconsejado debido a que es más sencillo de programar.

Primer Método:

Determinamos el ángulo V,

$$\hat{V} = 200^\circ - \hat{D} - \hat{I}$$

A continuación, por medio del teorema del seno calculamos los lados desconocidos del triángulo,

$$\frac{AV}{\text{sen}\hat{I}} = \frac{AB}{\text{sen}\hat{V}} = \frac{VB}{\text{sen}\hat{D}} \Rightarrow \begin{cases} VA = \frac{AB * \text{sen}\hat{I}}{\text{sen}\hat{V}} \\ VB = \frac{AB * \text{sen}\hat{D}}{\text{sen}\hat{V}} \end{cases}$$

Por último, tras calcular el azimut existente desde cada punto de estación al punto V, determinamos las coordenadas de V por cada lado.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_A^V &= \mathcal{G}_A^B - D & \mathcal{G}_B^V &= \mathcal{G}_A^B + I \\ X_V &= X_A + (AV * \text{sen}\mathcal{G}_A^V) & X_V &= X_B + (BV * \text{sen}\mathcal{G}_B^V) \\ Y_V &= Y_A + (AV * \text{cos}\mathcal{G}_A^V) & Y_V &= Y_B + (BV * \text{cos}\mathcal{G}_B^V) \end{aligned}$$

No obstante, remarcar que si los resultados no coinciden será debido única y exclusivamente a un error en el cálculo, no en los datos de campo, por lo que habrá que revisar los cálculos.

Segundo Método:

Este método siendo algo más complejo en cuanto al volumen de su desarrollo, tiene como ventaja que es mas fácil de programar y que puede ser usado igualmente en la intersección inversa. Para ello a partir de la ecuación de la recta crearemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y desde este punto despejaremos cada incógnita:

Desarrollo para Xv:

$$\left. \begin{aligned} X_v - X_1 &= (Y_v - Y_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 \\ X_v - X_2 &= (Y_v - Y_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} Y_v - Y_1 &= \frac{X_v - X_1}{\operatorname{tag} \vartheta_1} \\ Y_v - Y_2 &= \frac{X_v - X_2}{\operatorname{tag} \vartheta_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{X_v - X_1}{\operatorname{tag} \vartheta_1} - \frac{X_v - X_2}{\operatorname{tag} \vartheta_2} + Y_1 - Y_2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{X_v}{\operatorname{tag} \vartheta_1} - \frac{X_v}{\operatorname{tag} \vartheta_2} &= \frac{X_1}{\operatorname{tag} \vartheta_1} - \frac{X_2}{\operatorname{tag} \vartheta_2} - Y_1 + Y_2 \Rightarrow \\ X_v \left( \frac{1}{\operatorname{tag} \vartheta_1} - \frac{1}{\operatorname{tag} \vartheta_2} \right) &= \frac{X_1}{\operatorname{tag} \vartheta_1} - \frac{X_2}{\operatorname{tag} \vartheta_2} - Y_1 + Y_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$X_v = \frac{\frac{X_1}{\operatorname{tag} \vartheta_1} - \frac{X_2}{\operatorname{tag} \vartheta_2} - Y_1 + Y_2}{\frac{1}{\operatorname{tag} \vartheta_1} - \frac{1}{\operatorname{tag} \vartheta_2}}$$

Desarrollo para Yv:

$$\left. \begin{aligned} X_v - X_1 &= (Y_v - Y_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 \\ X_v - X_2 &= (Y_v - Y_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -X_v &= (Y_v - Y_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 + X_1 \\ -X_v &= (Y_v - Y_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 + X_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

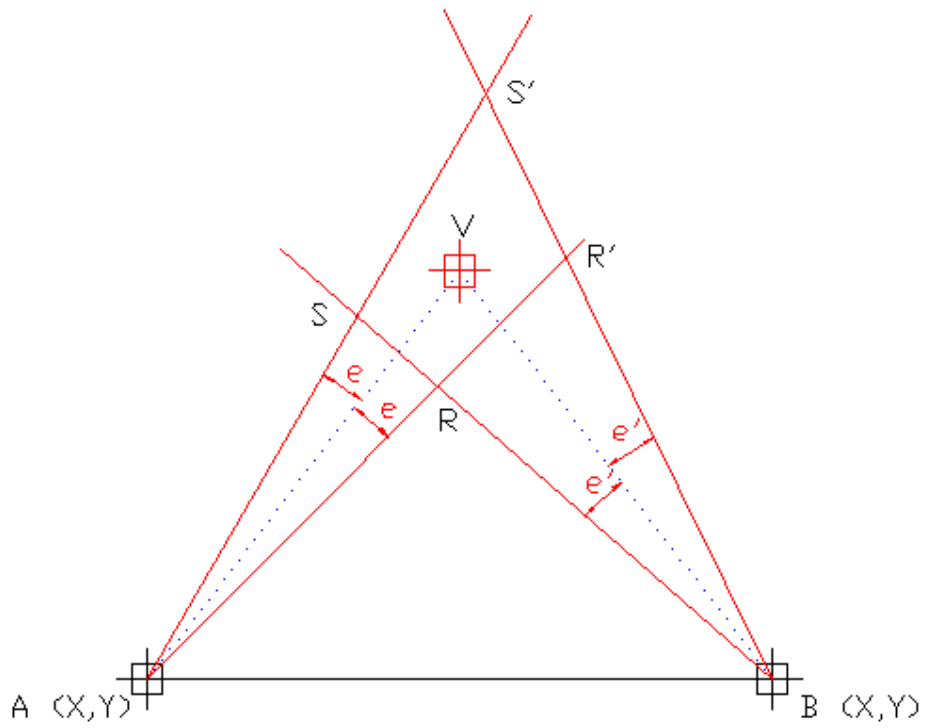
$$\begin{aligned} (Y_v - Y_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 - (Y_v - Y_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 + X_1 - X_2 &= 0 \Rightarrow \\ Y_v \operatorname{tag} \vartheta_1 - Y_1 \operatorname{tag} \vartheta_1 - Y_v \operatorname{tag} \vartheta_2 + Y_2 \operatorname{tag} \vartheta_2 + X_1 - X_2 &= 0 \Rightarrow \\ Y_v (\operatorname{tag} \vartheta_1 - \operatorname{tag} \vartheta_2) &= Y_1 \operatorname{tag} \vartheta_1 - Y_2 \operatorname{tag} \vartheta_2 - X_1 + X_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Y_v = \frac{Y_1 \operatorname{tag} \vartheta_1 - Y_2 \operatorname{tag} \vartheta_2 - X_1 + X_2}{\operatorname{tag} \vartheta_1 - \operatorname{tag} \vartheta_2}$$

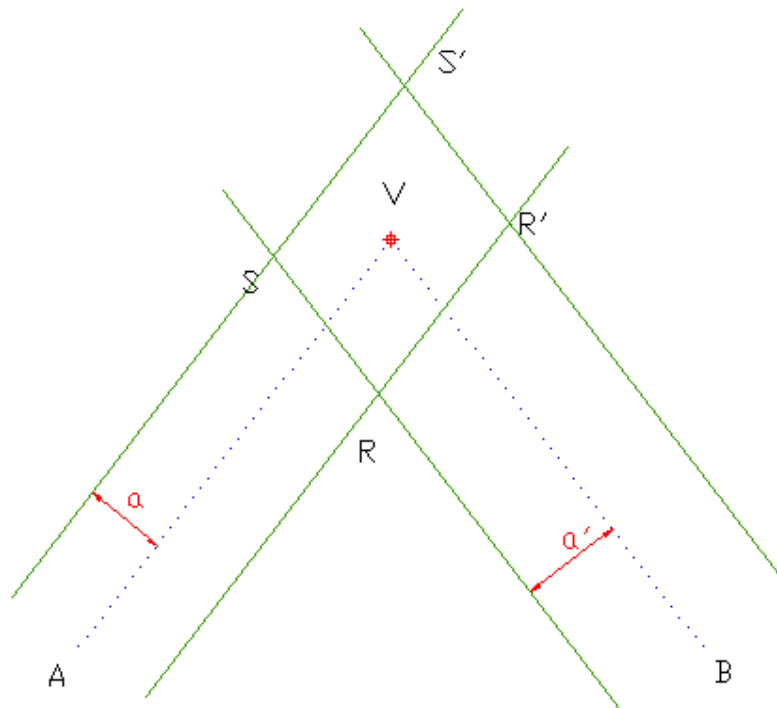
Como se puede observar, el programar estas fórmulas es bastante sencillo, y además nos servirán para calcular la intersección inversa solo con sumar o restar 200g a las lecturas azimutales.

### 3.- Error máximo. Longitud Máxima.

Suponiendo que no se comente error en la observación de AB ni de BA, y que solo se comete error al realizar al realizar las observaciones obtendremos el siguiente gráfico.



Y si suponemos que los errores son muy pequeños, podemos considerar que las visuales son paralelas a la línea que une cada estación, A y B, con V.



De este modo quedará un paralelogramo definido por las bandas de indeterminación S,S',R y R'; siendo la anchura de estas bandas función de la longitud de las visuales y de los errores  $e$  y  $e'$ . Por tanto de aquí podemos calcular las semibandas de Indeterminación  $a$  y  $a'$ :



$$\left. \begin{aligned} \alpha &= AV * e_{rad} \\ \alpha' &= BV * e'_{rad} \end{aligned} \right\}$$

Determinación de la elipse de tolerancia:

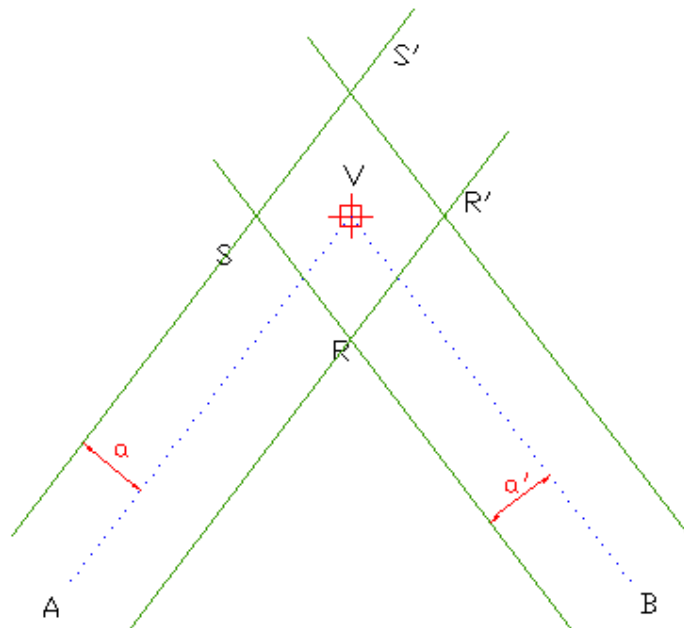
Simplificaciones:

$$* \overline{AV} = \overline{BV}$$

$$* \hat{D} = \hat{I}$$

Por último el error acometido en cada visual será igual debido a que se supone que se midieron con el mismo instrumento:

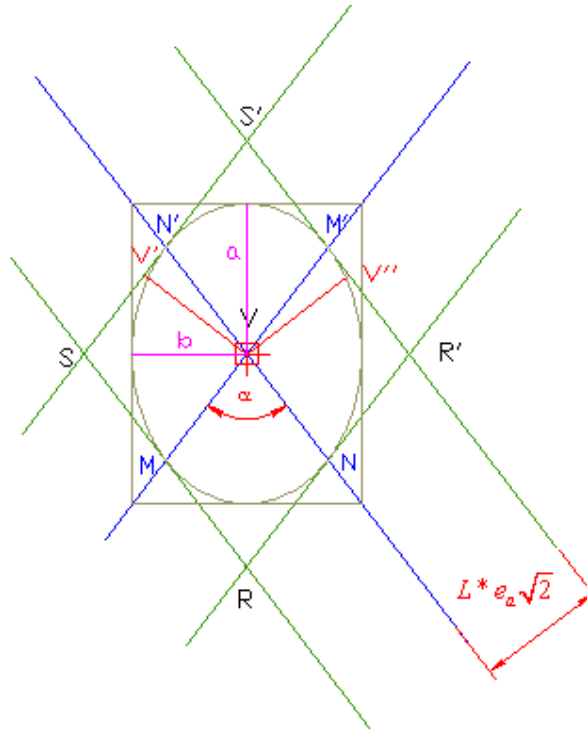
$$e = e_2 \sqrt{2}$$



Estas simplificaciones implican que podamos conocer la anchura de las semibandas y que estas sean iguales, quedando la siguiente expresión:

$$VV' = VV'' = Le_2 \sqrt{2}$$

De tal modo que el paralelogramo inicial RR'SS' se transforma en un Rombo,



el cual verifica que:

$$VV' = VN' \operatorname{sen} \alpha$$

$$VN' = \frac{VV'}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{L * e_2 * \sqrt{2}}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Para determinar la longitud de los semiejes de la elipse haremos uso de de las siguientes dos propiedades de los diámetro conjugados de las elipses:

1. Los paralelogramos formados por las tangentes a una elipse en lo extremos de los diámetro conjugados tienen el mismo área.
2. La suma de los semidiámetros conjugados es constante.

**Aplicación:**

1ª.- Propiedad:

Área Rombo \$RSS'R'\$ = Área Paralelogramo circunscrito a la elipse.

$$4ab = 2VN' * 2VV'' = 4VN' * VV' = 4VN'^2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$2ab = 2VN'^2 \operatorname{sen} \alpha$$

2ª.- Propiedad:

$$a^2 + b^2 = 2VN'^2 \operatorname{sen} \alpha$$

Si combinamos ambas propiedades sumando y restando obtendremos,

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 = 2VN^2(1 + \text{sen}\alpha) \rightarrow \text{Suma}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 = 2VN^2(1 - \text{sen}\alpha) \rightarrow \text{Resta}$$

$$\left. \begin{aligned} \pm a + b &= VN' \sqrt{2} \sqrt{1 + \text{sen}\alpha} \\ a - b &= VN' \sqrt{2} \sqrt{1 - \text{sen}\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} VN' \sqrt{2} (\sqrt{1 + \text{sen}\alpha} + \sqrt{1 - \text{sen}\alpha}) \\ b &= \frac{1}{2} VN' \sqrt{2} (\sqrt{1 + \text{sen}\alpha} - \sqrt{1 - \text{sen}\alpha}) \end{aligned} \right\} F1 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \text{sen}\alpha} + \sqrt{1 - \text{sen}\alpha}) &= \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \text{sen}\alpha} - \sqrt{1 - \text{sen}\alpha}) &= \text{sen} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} F2 \Rightarrow$$

Si sustituimos F1 con F2 tendremos que,

$$\left. \begin{aligned} a &= VN' \sqrt{2} * \cos \frac{\alpha}{2} \\ b &= VN' \sqrt{2} * \text{sen} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\}$$

De ambos semiejes "a" representa el máximo error que puede producirse, quedando que:

$$a = \frac{L * e_a \sqrt{2}}{\text{sen}\alpha} * \sqrt{2} * \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 * L * e_a}{2 * \text{sen} \frac{\alpha}{2} * \cos \frac{\alpha}{2}} * \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{L * e_a}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

$$L = \text{Longitud} = D = (AV + BV) / 2$$

**Nota:**

Para que la expresión anterior sea correcta alfa ha de ser un ángulo agudo, por tanto habremos de tener en cuenta siempre este dato, operando de una u otra manera:

Cuando alfa es un **ángulo Agudo**:

$$\alpha < 100 \rightarrow a = \frac{L * e_a / r^{\alpha}}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

Cuando alfa es un **ángulo Obtuso**:

$$\alpha > 100 \rightarrow \alpha = \frac{L^* \text{eal} r^{\text{cc}}}{\text{sen} \frac{200 - \alpha}{2}}$$

Ejercicio Ejemplo:

Determinar las coordenadas del pto P y su error máximo, sabiendo que se realiza una intersección directa con un teodolito de las siguientes características:

a = 1C  
 A = 30x  
 s = 50CC  
 ee+es = 2cm

En las observaciones se utilizó Bessel y los ptos de coordenadas colocidas eran:

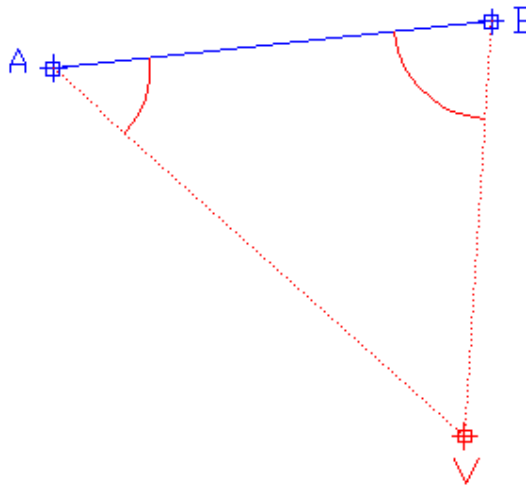
Pto	X	Y
A	1200.12	1825.42
B	3520.17	2073.21

Los ángulos observados fueron:

A= 60g 16C 30CC  
 B= 75g 87C 90CC

Por último, tener en cuenta que el pto P se encuentra a la derecha de la dirección AB.

Para determinar las coordenadas de P, utilizaremos el método de intersección de rectas debido a su sencillez en la programación en una calculadora.



Ya que conocemos las coordenadas de A y de B el conocimiento del azimut entre los mismos es directo, de tal modo que también podremos conocer el azimut de A a V y de B a V.

$$\vartheta_A^V = 153^{\circ} 38' 93''$$

$$\vartheta_B^V = 217^{\circ} 34' 73''$$

Aplicando en este punto el método de intersección de rectas obtendremos las coordenadas de V,

$$V = (2917.111, -84.869)$$

Llegados a este punto, solo queda calcular el emáx de la intersección directa:

$$L = \frac{\overline{AV} + \overline{BV}}{2} = 2404.635m$$

$$e_v = \frac{1}{12} * s'' = 4'' .1666$$

$$e_d = \frac{e_e + e_s}{L} * r'' = 5'' .2949$$

$$e_y = \frac{30''}{A} * \left( \frac{1+4A}{100} \right) * \frac{1}{\sqrt{2}} = 0'' .8556$$

$$e_i = \frac{2}{3} a \frac{1}{\sqrt{2}} = 47'' .1404$$

$$e_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_y^2 + e_i^2} = 47'' .6271$$

$$\alpha = 63^{\circ}9'58''$$

$$a = \frac{L * e_a}{\frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = 0.374m = e_{\max}$$

Longitud Máxima:

Para determinar la longitud máxima es tan sencillo como despejar L tanto de la fórmula del error máximo como de la del error de dirección a la vez.

$$a = \frac{L * \frac{e_a}{r^{\alpha}}}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{a * \text{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{e_a}{r^{\alpha}}} =$$

$$L = \frac{a * \text{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_i^2}}{r^{\alpha}}} =$$

$$L = \frac{a * \text{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{e_v^2 + e_d^2 + \left(\frac{e_e + e_s * r^{\alpha}}{L}\right) + e_i^2}}{r^{\alpha}}} \Rightarrow$$

$$L^2 = \frac{\left(a * \text{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{e_v^2 + e_d^2 + \left(\frac{e_e + e_s * r^{\alpha}}{L}\right) + e_i^2}{r^{\alpha 2}}} \Rightarrow$$

$$L^2 = \frac{\left(a * \text{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^2 * r^{\alpha 2}}{e_v^2 + e_d^2 + \left(\frac{e_e + e_s * r^{\alpha}}{L}\right) + e_i^2} \Rightarrow$$

$$L^2 * \left(e_v^2 + e_d^2 + \left(\frac{e_e + e_s * r^{\alpha}}{L}\right) + e_i^2\right) = \left(a * \text{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^2 * r^{\alpha 2} \Rightarrow$$

$$e_v^2 * L^2 + e_d^2 * L^2 + \left(\frac{e_e + e_s * r^{\alpha}}{L}\right) * L^2 + e_i^2 * L^2 = \left(a * \text{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^2 * r^{\alpha 2} \Rightarrow$$

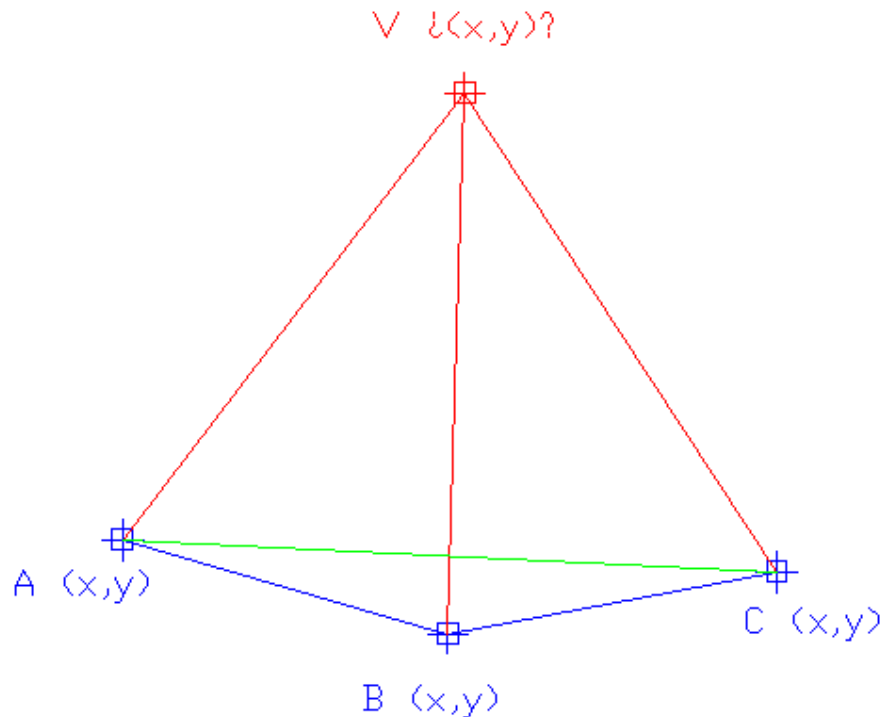
$$\left(e_v^2 + e_d^2 + e_i^2\right) * L^2 + \left(e_e + e_s\right) * r^{\alpha} * L - \left(a * \text{sen} \frac{\alpha}{2} * r^{\alpha}\right)^2 = 0$$

**Nota:**

Tener en cuenta que aquí debemos de conocer conque precisión hay que realizar la intersección y las especificaciones del instrumental a utilizar.

#### 4.- Intersección directa múltiple.

La intersección directa múltiple surge para poder tener comprobación de los resultados, ya que como se comento anteriormente la intersección directa simple no tiene comprobación. Para ello como mínimo utilizaremos 3 vértices de coordenadas conocidas.



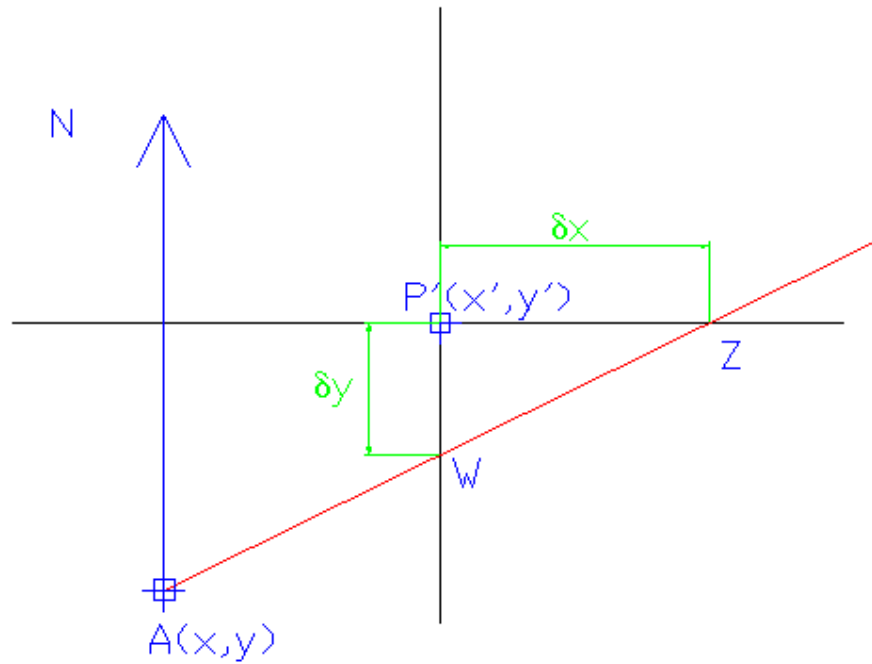
Tal y como podemos observar, se pueden utilizar 3 triángulos diferentes para determinar las coordenadas de V, los cuales nos darán diferentes resultados pero muy aproximados entre sí. Por lo que para determinar las coordenadas finales de V, realizaremos una media ponderada de los resultados obtenidos dando mayor peso al que tenga el menor error máximo.

(Aunque no se comenta, se da por supuesto que el cálculo de las coordenadas de V se hará con cada triángulo por separado utilizando cualquiera de los métodos resolutivos de la intersección directa).

##### 5.- Método numérico gráfico del punto aproximado.

Este método surge para salvar el problema que se deriva al intentar representar gráficamente la intersección directa múltiple a escalas 1/10 ó 1/50, ya que la cantidad de papel que necesitaríamos no sería manejable. Por tanto, con este método lo que hacemos es trabajar con una zona muy pequeña del dibujo, siendo esta la zona de incertidumbre donde se encuentra la solución aproximada que debemos conocer de antemano (por media ponderada o media aritmética).

Para poder conocer la geometría de la zona del punto problema, calcularemos las desviaciones de las visuales con el punto aproximado P', a las cuales denominaremos " $\delta x$ " y " $\delta y$ ".



Cálculo de  $\delta x$  :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_A^P &= \frac{x_z - x_A}{y_z - y_A} \\ y_z &= y' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (y' - y_A) * \operatorname{tg} \vartheta_A^P &= (x_z - x_A) \\ \delta_x &= x_z - x' \end{aligned} \right\}$$

$$(y' - y_A) * \operatorname{tg} \vartheta_A^P = (\delta_x + x' - x_A) \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta_x = (y' - y_A) * \operatorname{tg} \vartheta_A^P - (x' - x_A)}$$

Cálculo de  $\delta y$  :



$$\left. \begin{aligned} \cotg \vartheta_A^p &= \frac{y_w - y_A}{x_w - x_A} \\ x_w &= x' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

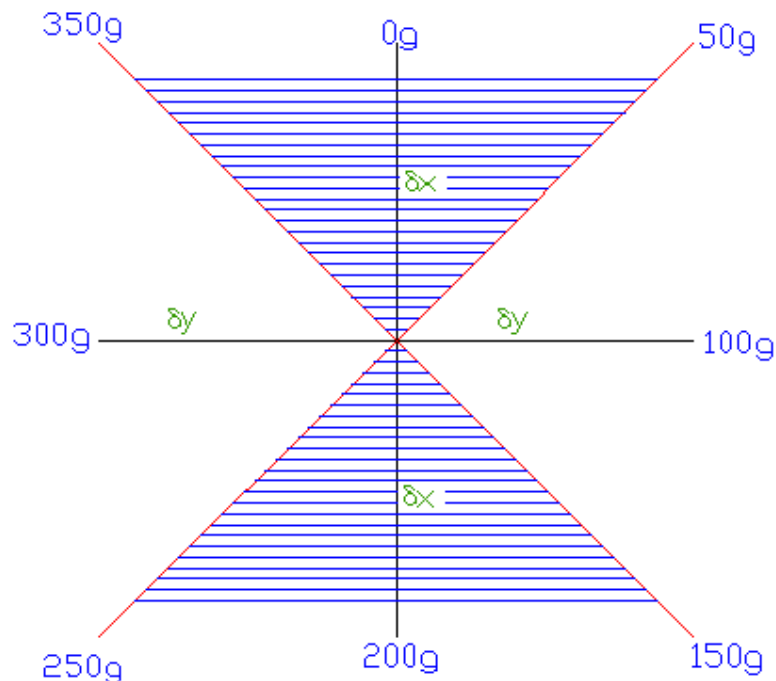
$$\left. \begin{aligned} (x' - x_A) * \cotg \vartheta_A^p &= (y_w - y_A) \\ \delta_y &= y_w - y' \end{aligned} \right\}$$

$$(x' - x_A) * \cotg \vartheta_A^p = (\delta_y + y' - y_A) \Rightarrow$$

$$\delta_y = (x' - x_A) * \cotg \vartheta_A^p - (y' - y_A)$$

De este modo si unimos los puntos Z y W, quedará representada la visual del punto A. Por tanto, para realizar la representación gráfica de la intersección directa múltiple no tendremos más que calcular el  $\delta x$  y el  $\delta y$  de cada visual.

Otra pequeña variación del método, si así puede considerarse es la de calcular o el  $\delta x$ , o el  $\delta y$ , pero solo uno de los dos. Ya que conocido uno y el azimut podemos con un transportador trazar la visual. Para aplicar este método, se seleccionará según el ángulo de corte de la visual con los ejes coordenados uno u otro, seleccionado el que corte con el ángulo más próximo al ángulo recto. Par ello nos podemos auxiliar de la siguiente gráfica.



La ventaja más importante que se deriva de este método es que permite realizar sucesivos reiteraciones.

Esto puede ser necesario cuando los  $\delta x$  y  $\delta y$  son muy grandes lo cual nos obliga a trabajar con escalas pequeñas, de tal modo que según vayamos reiterando el método podremos utilizar escalas mayores y por tanto la solución final será más precisa.

## 6.- Intersección directa múltiple por el método del punto aproximado.

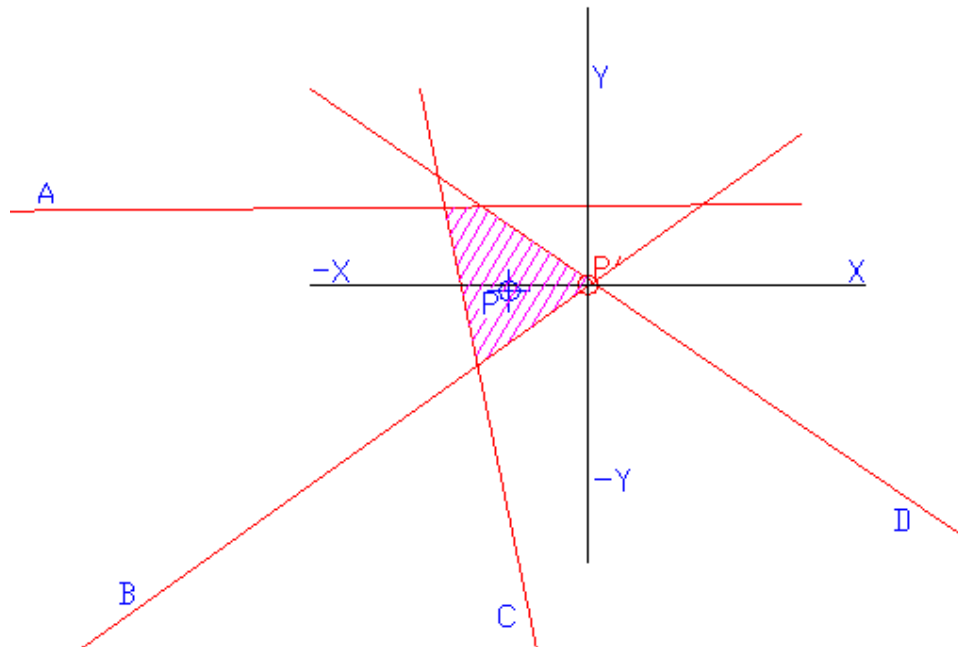
Para iniciar los cálculos primero habremos de determinar un punto aproximado, tal y como se comentó anteriormente. Para ello podemos determinarlo de varias formas:

1. Situación de un punto P' sobre el plano y leer sus coordenadas de modo gráfico.
2. Construir gráficamente la mejor de las intersecciones, y deducir a partir de ésta las coordenadas gráficas de P'.
3. Calcular numéricamente la de las intersecciones y tomar como P' su solución.
4. Representar gráficamente por medio de un programa CAD todas las visuales, y determinar a estima el punto P'.

Conocidas las coordenadas de P' ya podemos determinar los puntos de corte de cada visual con los ejes coordenados que salen de P'. (En el caso de utilizar un programa CAD o un transportador de ángulos con determinar uno de los dos cortes valdrá.)

Si va a trabajarse en papel, una vez determinados los  $\delta x$  y  $\delta y$  se seleccionará la escala más adecuada para la construcción gráfica de la zona de la intersección. Si va a trabajarse con un programa CAD trabajaremos a escala 1/1.

Una vez realizada la representación gráfica se determinará el punto P, el cual se encontrará situado dentro del polígono de error resultante de la intersección de todas las visuales de la intersección directa múltiple.



Para determinar la posición del punto P tenemos las siguientes alternativas:

1. Trazar las bandas de indeterminación de cada una de las visuales, siendo su valor el resultante de la siguiente expresión para cada visual:

$$\text{Banda} = \frac{L \cdot e \alpha \cdot \sqrt{2}}{\text{sen } \alpha}$$

La zona donde se superpongan todas las bandas de indeterminación será la zona que mayor probabilidad tenga de contener la solución. (Dentro de esta zona se escogerá el punto central.)

2. Trazar la elipse de tolerancia para cada dos visuales, posteriormente se buscará el punto solución dentro de la zona resultante de todas las elipses.
3. Selección del punto solución a ojo dentro del polígono de error, procurando que la distancia de dicho punto a las visuales cumplan con la condición de proporcionalidad.
4. Reducción de la zona del polígono por medio de paralelas a cada uno de sus lados, las cuales estarán separadas proporcionalmente según la longitud de las visuales.

Una vez determinada la posición del punto P, determinaremos sus coordenadas midiendo los incrementos de "x" y de "y" desde el punto P a P'. Posteriormente con sumar los incrementos obtendremos directamente las coordenadas de P.

$$\left. \begin{aligned} X_p &= X_{p'} + \Delta X_{p'} \\ Y_p &= Y_{p'} + \Delta Y_{p'} \end{aligned} \right\}$$

**Ejercicio Ejemplo:**

Determinar las coordenadas de un punto P levantado por Intersección Directa Múltiple desde los vértices A, B, C y D. Mediante el procedimiento del punto aproximado.

EST A	LH
A-B	247 g 32 c 60 cc
A-P	179 g 49 c 50cc
EST B	LH
B-A	353 g 25 c 70cc
B-P	46 g 45 c 00cc
EST C	LH
C-B	168 g 14 c 40 cc
C-P	234 g 68 c 80 cc
C-D	298 g 47 c 30 cc
EST D	LH
D-C	256 g 36 c 90 cc
D-P	343 g 90 c 80 cc

Pto	X	Y
A	975.367	1043.634
B	1000.000	1000.000
C	1076.444	974.637
D	1112.403	1009.788
P'	1062.000	1044.343

Trabajar a escala 1/1.

Calculamos las desorientaciones para obtener los azimutes; también calculamos la distancia existente desde cada vértice a P'.

Est	Pto	LH	Azimut	D
A	B	247.326	167.282	
A	P	179,495	99,451	86,635
Est	Pto	LH	Azimut	D
B	A	353.257	367.282	
B	P	46.45	60.475	76.225
Est	Pto	LH	Azimut	D
C	B	168.144	320.395	
C	P	234.688	386.939	71.187
C	D	298.473	50.724	

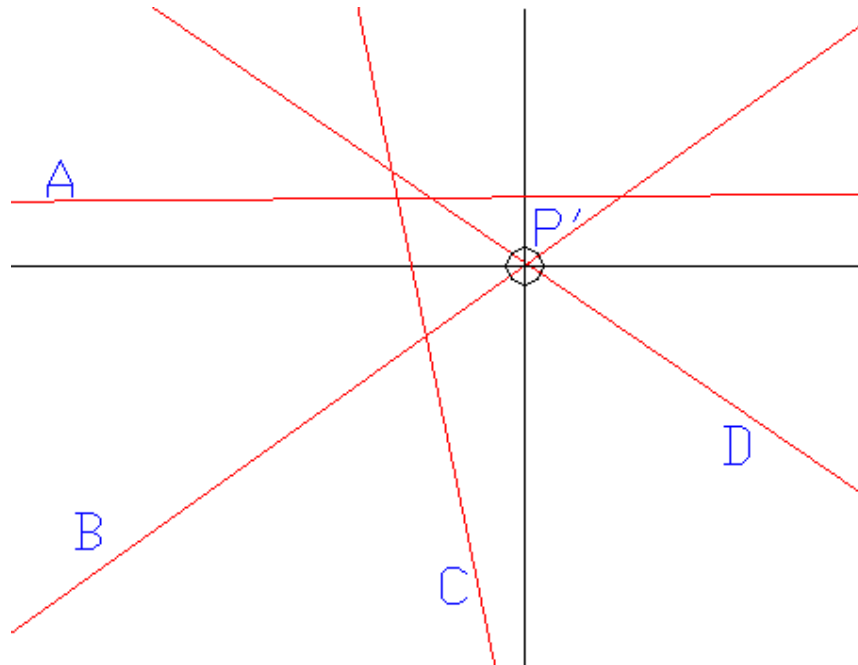
Est	Pto	LH	Azimet	D
D	C	256.369	250.723	
D	P	343.908	338.262	61.111

Conocidos los azimutes de todas las visuales pasamos a calcular  $\delta x$  y  $\delta y$ , los cuales calcularemos todos si utilizamos alguna hoja de cálculo ya que no lleva mucho tiempo, ó sino determinamos únicamente el mejor de cada visual, tal y como se comento anteriormente.

Visuales	$\delta_x = (y' - y_A) * \operatorname{tg} \vartheta_A^P - (x' - x_A)$	$\delta_y = (x' - x_A) * \operatorname{cotg} \vartheta_A^P - (y' - y_A)$
A - P	-4.419	0.038
B - P	0.000	0.000
C - P	-0.061	-0.294
D - P	0.004	0.003

(En azul aparecen los datos que deltas que habría que calcular en el caso de utilizar un transportador, o usar solo un punto.)

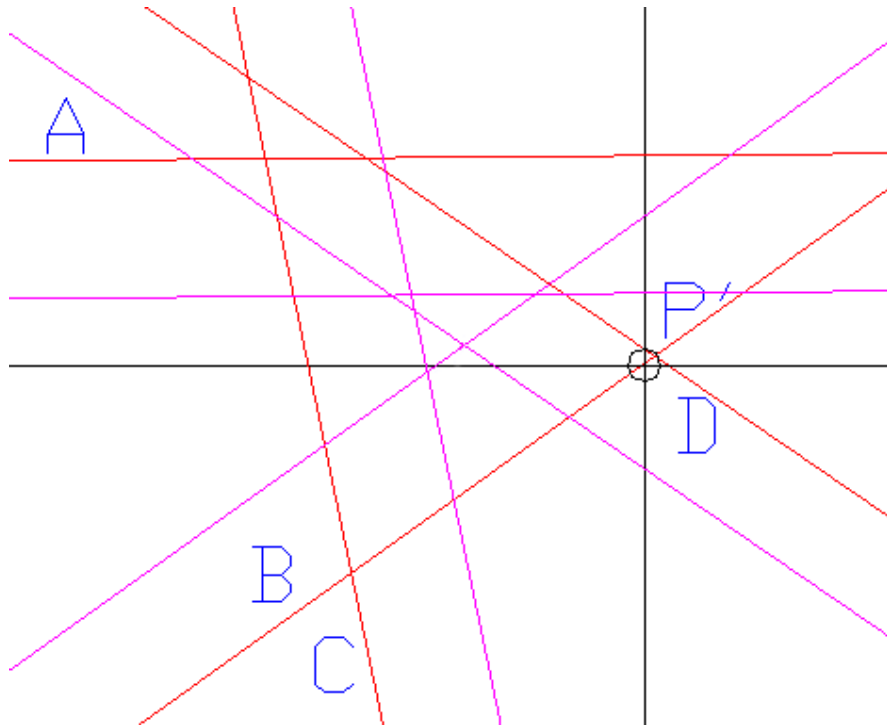
A continuación procedemos a realizar la representación gráfica de la intersección a escala 1/1:



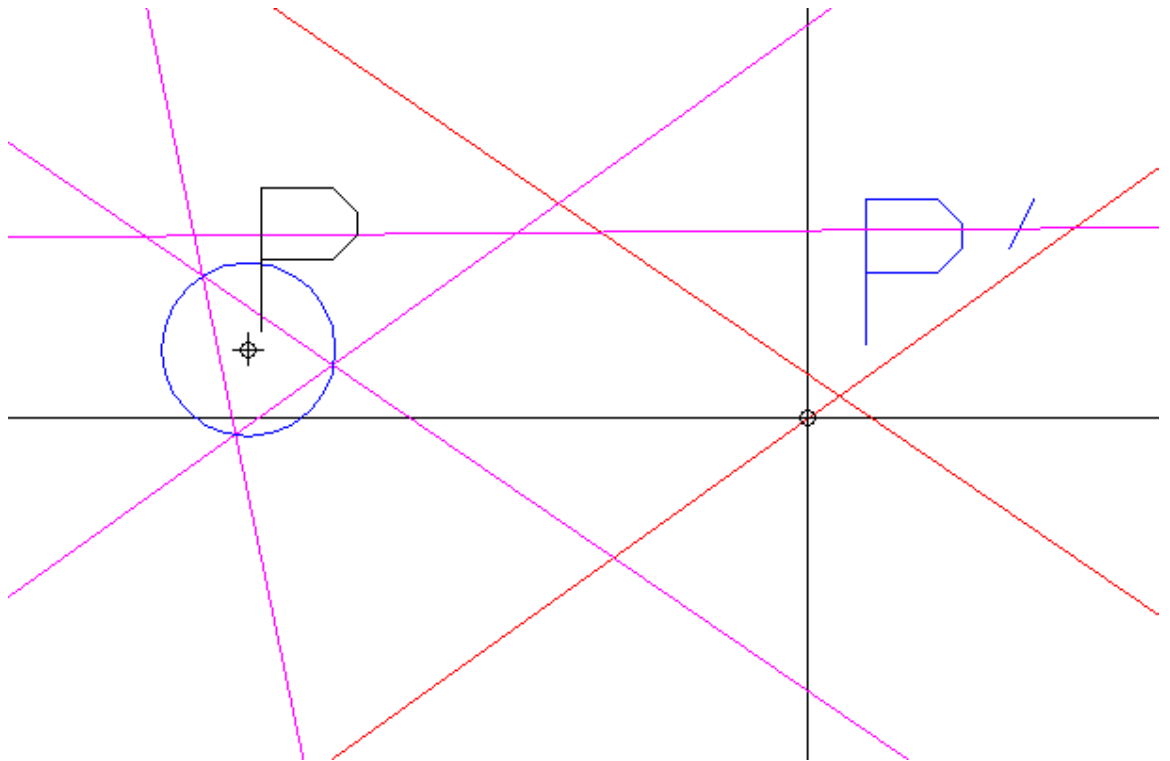
Ahora, para determinar la posición del punto solución P trazaremos una paralela a cada una de las visuales, utilizando como distancia de separación 2.5 cm para la que visual más larga y el resto disminuyendo la separación en función de la distancia.

Cálculo del coeficiente:  $0.025 \text{ m} / 86.635 \text{ m} = 0.000288564$

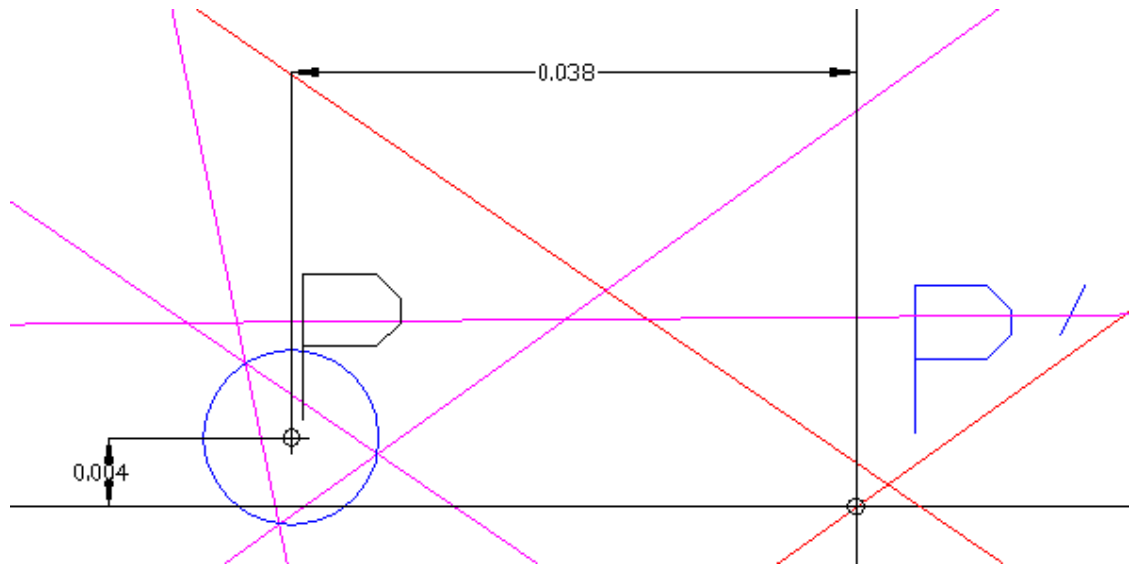
Visual	Separación de la paralela
A	0.025 m
B	0.022 m
C	0.021 m
D	0.018 m



Tras dibujar las paralelas a las visuales ya tenemos acotada la zona donde se encuentra la solución, ahora podemos seleccionar la posición del punto P a "ojo", o bien calcular el centro de la zona resultante. En este caso se ha optado por determinar el centro del triángulo que se nos ha formado como zona más probable para la solución correcta, en la cual se ha eliminado la visual A.



Ya solo nos queda medir el incremento existente para "x" y para "y" entre P y P':



$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = -0.038 \\ \Delta y = +0.004 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$X_p = X_{p'} + \Delta x = 1062.000 - 0.038 = 1061.962$$

$$Y_p = Y_{p'} + \Delta y = 1044.343 + 0.004 = 1044.347$$

$$P = (1061.962, 1044.347)$$

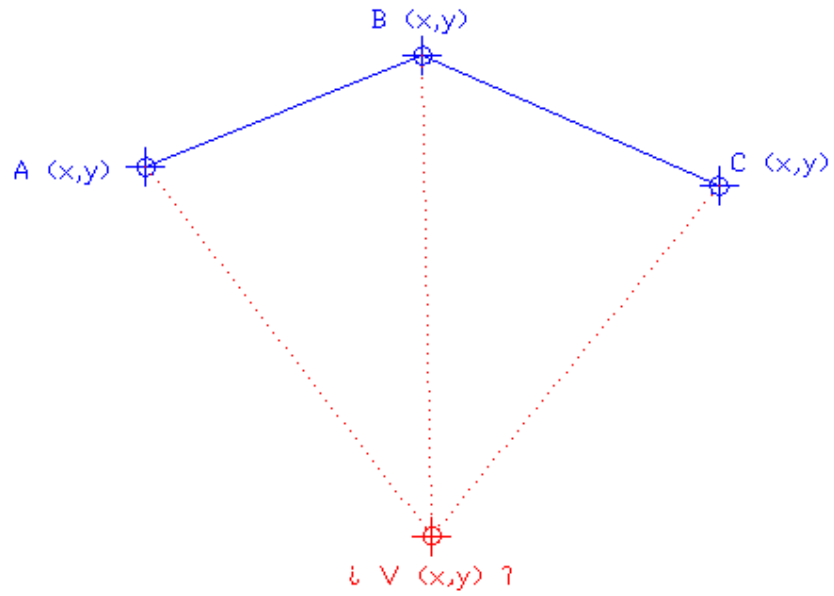
**Nota:** Si bien el enunciado del ejercicio ejemplo dice "representar a escala 1/1", por claridad la escala en los gráficos mostrados no se ha mantenido.

#### TEMA 5.- INTERSECCIÓN INVERSA

1. Concepto.
2. Intersección inversa simple. Cálculo numérico.
3. Error máximo.
4. Intersección inversa múltiple. Soluciones numéricas.
5. Intersección inversa múltiple por el método del punto aproximado.
6. Pothot múltiple.
7. Problema de Hansen.

#### 1.- Concepto.

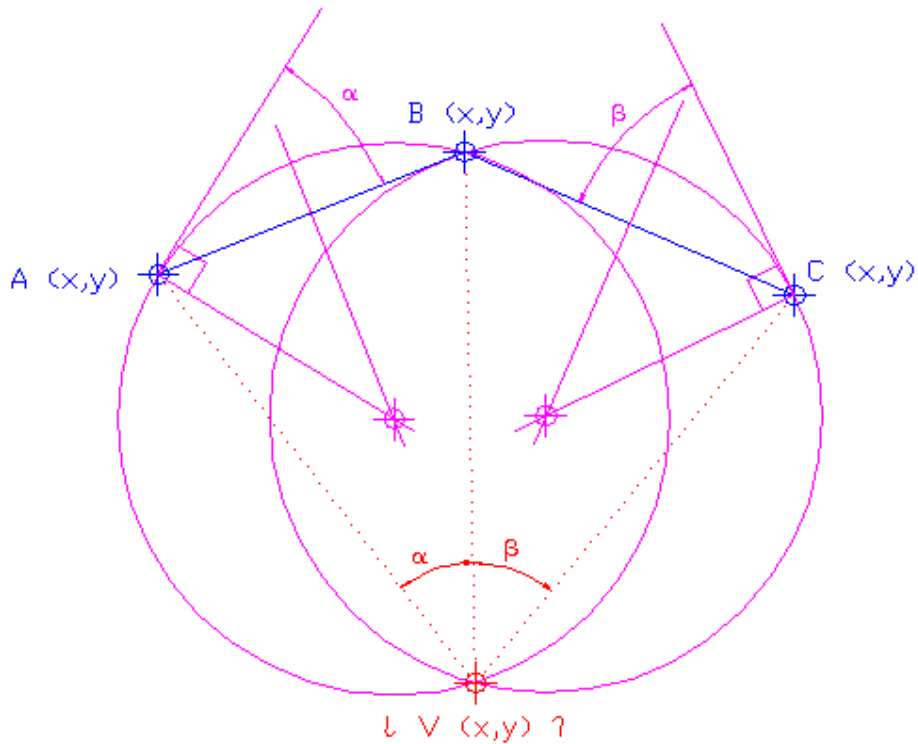
Método planimétrico en el cual solo se miden ángulos para la determinación de las coordenadas de un punto V en el cual se estaciona, visando como mínimo a 3 puntos de coordenadas conocidas. (Debido a este motivo este método es conocido como trisección).



**Clasificación:**

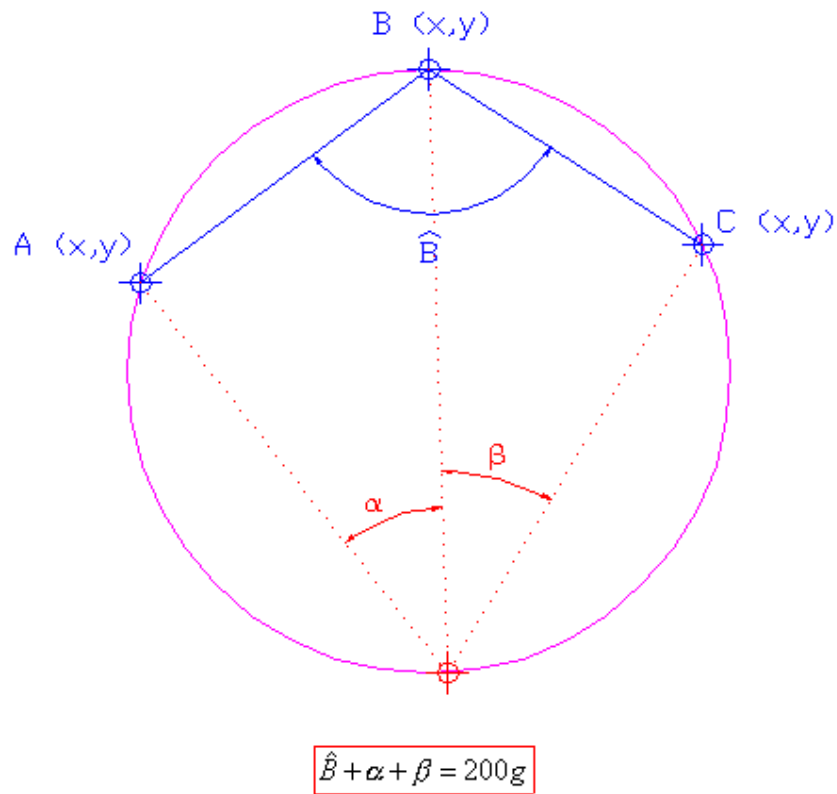
1. **I. Inv. Simple:** No se tiene comprobación del resultado.
2. **I. Inv. Múltiple:** Si se tiene comprobación del resultado.

El fundamento geométrico en el que se sustenta la trisección para calcular las coordenadas de V, es el de la intersección de los arcos capaces de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  apoyándose en el segmento AB y en el BC respectivamente.



Como se puede apreciar en la figura, el punto V es determinado por la intersección de los arcos capaces de  $\alpha$  y  $\beta$ , de aquí por tanto se puede deducir que existe un caso en el cual no será posible obtener una

solución. Este caso se da cuando la suma de los ángulos B,  $\alpha$  y  $\beta$  es igual a  $200g$ , lo cual provoca que los arcos capaces coincidan y por tanto no se intersecten, tal y como se puede apreciar en la figura inferior.

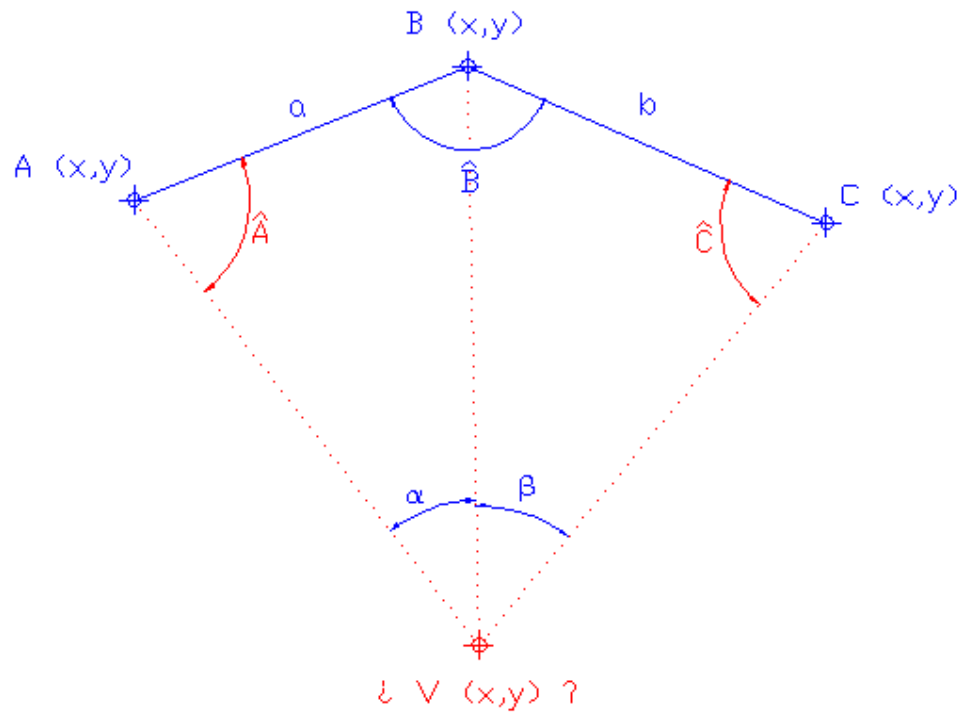


**2.- Intersección inversa simple. Cálculo numérico.**

En campo solamente se miden los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , a partir de estos posteriormente

A continuación se muestran dos métodos diferentes para el cálculo de las coordenadas de V, "Pothot y Morejón", siendo su objetivo principal el determinar los ángulos A y C, ya que tras su conocimiento el cálculo de las coordenadas de V es directo.





Parte común a "Pothot" y "Morejon":

$$\left. \begin{aligned} \overline{VB} &= \overline{AB} * \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\alpha} = a * \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\alpha} \\ \overline{VB} &= \overline{BC} * \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\beta} = b * \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$a * \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\alpha} = b * \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\beta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{a * \text{sen}\beta}{b * \text{sen}\alpha}}$$

"Pothot":

Si,

$$\text{tgy} = \frac{a * \text{sen}\beta}{b * \text{sen}\alpha}$$

entonces podemos decir también que,

$$\frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{\text{tgy}}{1}$$

Si esta última expresión, la transformamos sumando (denominador + numerador) para el denominador y restando (denominador - numerador) para el numerador, entonces queda:

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A} - \operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\gamma}$$

A continuación desarrollamos cada una de las dos expresiones de la igualdad por separado,

$$\bullet \frac{1 + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg}\gamma} = \boxed{\operatorname{tg}(50 + \gamma)}$$

$$\bullet \frac{\operatorname{sen}\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A} - \operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{2 * \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C})\right) * \cos\left(\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})\right)}{2 * \cos\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C})\right) * \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})\right)} = \boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C})\right) * \operatorname{cot} g\left(\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})\right)}$$

si volvemos a unir ambas expresiones y las desarrollamos, obtendremos,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C})\right) * \operatorname{cot} g\left(\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})\right) = \operatorname{tg}(50 + \gamma) \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C})\right) * \operatorname{cot} g(50 + \gamma)}$$

A partir de aquí podemos determinar los ángulos A y C:

$$\hat{A} + \hat{C} = 400^\circ - (\hat{B} + \alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C}) = 200^\circ - \left(\frac{1}{2}(\hat{B} + \alpha + \beta)\right)}$$

$$M = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C}) = \boxed{200^\circ - \left(\frac{1}{2}(\hat{B} + \alpha + \beta)\right)}$$

$$N = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C}) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C})\right) * \operatorname{cot} g(50^\circ + \gamma)\right) = \boxed{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(200^\circ - \left(\frac{1}{2}(\hat{B} + \alpha + \beta)\right)\right) * \frac{b * \operatorname{sen}\alpha}{a * \operatorname{sen}\beta}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{A = M + N}$$

$$\boxed{C = M - N}$$

"Morejón":

$$\frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{a * \text{sen}\beta}{b * \text{sen}\alpha} \Rightarrow M = \frac{a * \text{sen}\beta}{b * \text{sen}\alpha}$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 400 - (\alpha + \beta + \hat{B}) \Rightarrow N = 400 - (\alpha + \beta + \hat{B})$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{C} = N \\ \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = M \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{C} = N - \hat{A} \\ \frac{\text{sen}(N - \hat{A})}{\text{sen}\hat{A}} = M \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$M * \text{sen}\hat{A} = \text{sen}(N - \hat{A}) \Rightarrow$$

$$\frac{M * \text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{(\text{sen}N * \cos\hat{A}) - (\cos N * \text{sen}\hat{A})}{\text{sen}\hat{A}} \Rightarrow$$

$$M = \text{sen}N * \cot\hat{A} - \cos N \Rightarrow$$

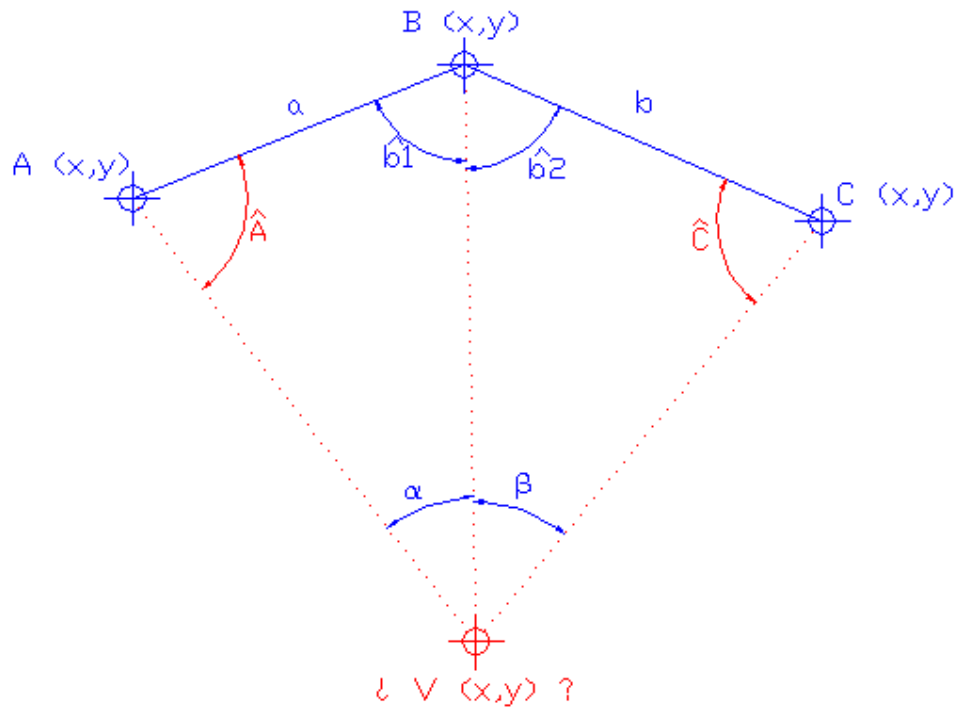
$$\text{tg}\hat{A} = \frac{\text{sen}N}{M + \cos N} \Rightarrow$$

$$\hat{A} = \text{arctg}\left(\frac{\text{sen}N}{M + \cos N}\right)$$

$$\hat{C} = N - \hat{A} \Rightarrow$$

$$\hat{C} = N - \text{arctg}\left(\frac{\text{sen}N}{M + \cos N}\right)$$

Una vez conocidos los ángulos A y C, se hace directa la determinación de las coordenadas del punto V, las cuales pueden ser calculadas por el método de intersección de rectas comentado en el tema 4 "Intersección Directa" o por medio del teorema del seno, el cual será comentado a continuación:



$$b1 = 200 - \hat{A} - \alpha$$

$$b2 = 200 - \hat{C} - \beta$$

$$\frac{\overline{AV}}{\text{sen} \hat{b}1} = \frac{a}{\text{sen} \alpha} \Rightarrow$$

$$\overline{AV} = \frac{a * \text{sen} \hat{b}1}{\text{sen} \alpha} = D_A^V$$

$$g_A^V = g_A^B + \hat{A}$$

$$\Delta x_A^V = D_A^V * \text{sen} g_A^V$$

$$\Delta y_A^V = D_A^V * \text{cos} g_A^V$$

$$\left. \begin{array}{l} X_V = X_A + \Delta x_A^V \\ Y_V = Y_A + \Delta y_A^V \end{array} \right\}$$

$$\frac{\overline{CV}}{\text{sen} \hat{b}2} = \frac{b}{\text{sen} \beta} \Rightarrow$$

$$\overline{CV} = \frac{b * \text{sen} \hat{b}2}{\text{sen} \beta} = D_C^V$$

$$g_C^V = g_C^B - \hat{C}$$

$$\Delta x_C^V = D_C^V * \text{sen} g_C^V$$

$$\Delta y_C^V = D_C^V * \text{cos} g_C^V$$

$$\left. \begin{array}{l} X_V = X_C + \Delta x_C^V \\ Y_V = Y_C + \Delta y_C^V \end{array} \right\}$$

El determinar las coordenadas del punto V por ambos lados, nos servirá para asegurarnos de que los cálculos estén bien realizados, nunca como comprobación de los datos de campo.